

S'exercer sur le produit scalaire

1 Géométrie non repérée

Exercice 1. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. En décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{ED})$ en degrés.

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. Soit O le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de C . En calculant $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes, calculer la longueur BH .

Exercice 3. Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

1. En décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2.$$

2. Quelle propriété retrouve-t-on lorsque ABC est rectangle en A ?
3. Calculer AI lorsque $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un carré. Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. En décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 5. Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
 2. Que se passe-t-il lorsque le triangle est isocèle en M ?
-

Exercice 6. Soient A et B deux points distincts du plan. Soit (d) une droite ne passant ni par A , ni par B . Déterminer le point M de (d) tel que la somme $MA^2 + MB^2$ soit minimale. On pourra considérer le milieu I du segment $[AB]$.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2).$$

2 Géométrie repérée

Exercice 8. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2; -5)$, $B(3; 5)$, $C(8; -2)$, $D(-2; 3)$, $E(1; -5)$ et $F(-5; 7)$. Parmi les droites (AB) , (CD) et (EF) , déterminer celles qui sont perpendiculaires.

Exercice 9. On rappelle que le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2; -1)$, $B(8; 5)$, $C(-2; 5)$, $D(6; 7)$ et $E(8; 5; 4)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Les points C , D et E appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?

Exercice 10. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5; 3)$, $B(-4; -4)$ et $C(10; -3)$.

1. Le triangle ABC est-il rectangle ?
 2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près, en degrés, de chacun des angles de ABC .
-

Exercice 11. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3; -2)$, $B(-1; 5)$ et $C(7; -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices du triangle ABC et retrouver qu'elles sont concourantes.
 2. Même question avec les hauteurs du triangle ABC .
-

Exercice 12. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3; 3)$ et $B(-4; 0)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A passant par B .

Exercice 13. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(8; 6)$, $B(-6; 6)$, $C(-8; -2)$ et $D(8; -6)$. Démontrer que A , B , C et D appartiennent à un même cercle.