
S'exercer sur les droites dans le plan et leurs applications : corrigé des exercices

Exercice 1.

Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{u}(4; 2)$ et passant par le point $A(-3; -3)$. Montrer que le point $B(11; 4)$ appartient à cette droite.

Solution : Le point B appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Or $\vec{u}(4; 2)$ et $\overrightarrow{AB}(14; 7)$ sont colinéaires car chacun est colinéaire au même troisième vecteur $\vec{v}(2; 1)$. Ainsi B est bien un point de la droite d .

Autre méthode : on établit d'abord l'équation cartésienne de la droite d , avec le vecteur normal $\vec{n}(2; -4)$ et le point de passage A :

$$2(x - (-3)) - 4(y - (-3)) = 0,$$

soit

$$2x - 4y - 6 = 0.$$

On vérifie ensuite que les coordonnées du point B satisfont cette équation.

Exercice 2.

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(2; -3)$, $B(-2; -4)$, $C(4; -3)$, et $D(8; -2)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Solution : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AB}(-4; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(4; 1)$ sont opposés et donc colinéaires, ce qui assure le parallélisme des droites en question.

Exercice 3.

Donner deux vecteurs directeurs de la droite d , d'équation réduite $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

Solution : Si m est le coefficient directeur d'une droite d alors le vecteur $\vec{u}(1; m)$ en est un vecteur directeur, ainsi que tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$. Donc, dans cette famille de vecteurs, on peut citer $\vec{u}(1; -\frac{1}{3})$ et $\vec{v} = -3\vec{u}(-3; 1)$.

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2; -5)$, $B(-4; \frac{25}{2})$ et le vecteur $\vec{u}(-2; 6)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Le point B appartient-il à d ?

Solution : Un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or, $\vec{u}(-2; 6)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 2; y + 5)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$6(x - 2) = -2(y + 5)$$

soit

$$-3(x - 2) = y + 5$$

et finalement : $3x + y - 1 = 0$, qui est une équation cartésienne de d .

De plus, le calcul de $3x_B + y_B - 1$ mène à $3 \times (-4) + \frac{25}{2} - 1$, qui ne peut être nul, donc B n'est pas un point de la droite d .

Exercice 5.

Dans un repère orthonormé du plan, déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $C(-2; \frac{1}{2})$ et $D(4; -3)$. Donner une représentation graphique de cette droite.

Solution : Un point $M(x; y)$ appartient à d' si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{DC}(-6; \frac{7}{2})$ et $\overrightarrow{DM}(x - 4; y + 3)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\frac{7}{2}(x - 4) = -6(y + 3)$$

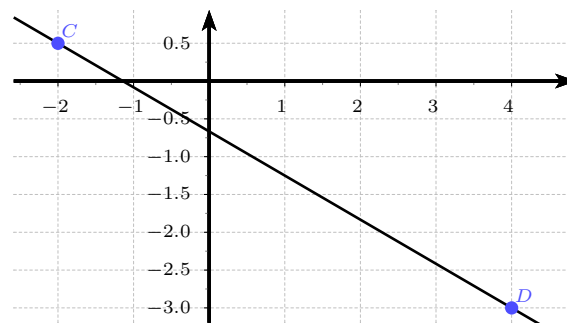
soit

$$7(x - 4) = -12(y + 3)$$

et finalement

$$7x + 12y + 8 = 0,$$

qui est une équation cartésienne de d' . En voici une représentation graphique :



Exercice 6.

Soit ABC un triangle et K est le point tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. On note M le milieu du segment $[AB]$ et I le milieu du segment $[MC]$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A , I et K sont alignés.

Solution :

1. D'après la relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI};$$

En tenant compte des hypothèses, on a de plus :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC};$$

Puis : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2. Or, le résultat précédent conduit à

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}).$$

Ainsi, on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AK}$, ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ et donc l'alignement des points A , I et K .

Exercise 7.

ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D , E et F par :

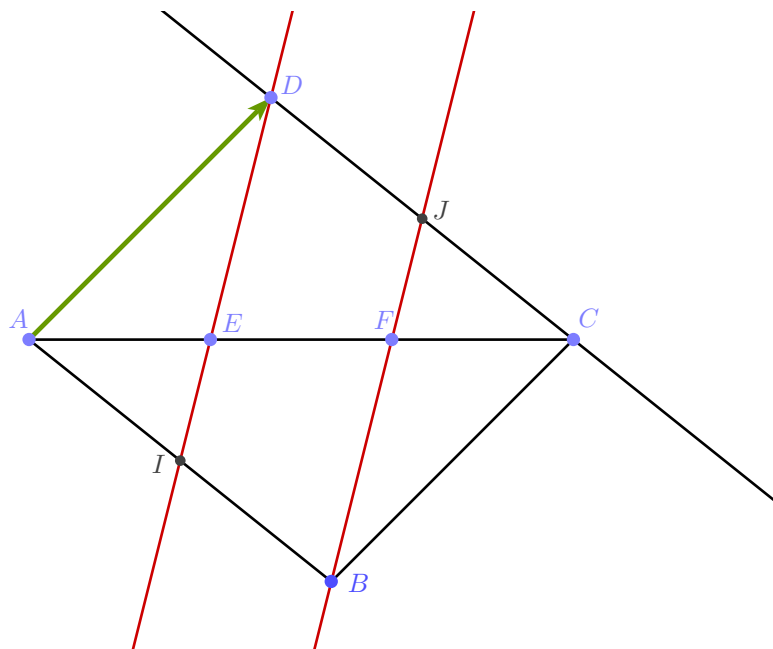
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Construire D, E, F, I et J .
2. Montrer que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer que les points B, F et J sont alignés.

Solution :

1. Construction des points D , E , F , I et J , à l'aide de la règle et du compas.



2. On sait que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$; donc, en utilisant les hypothèses : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D'autre part, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ qui est aussi $-\overrightarrow{ED}$.

La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BF}$ étant prouvée, on déduit le parallélisme des droites (DE) et (BF) .

3. D'une part, on a : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; d'autre part, il vient :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ puis :}$$

$$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{DE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires, ce qui prouve l'alignement des points D , E et I .

4. La démonstration peut ressembler à celle de la question précédente :

D'une part, on a : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; d'autre part, il vient :

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}, \text{ puis :}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires, ce qui prouve l'alignement des points B , F et J .

Exercice 8.

Représenter dans le plan $\mathcal{P}$ les ensembles de points $(x; y)$ du plan $\mathcal{P}$ tels que

1. $|x| = 3$,
2. $|x| = |y|$,
3. $|x| < 3$,
4. $|y| \geq 3$.

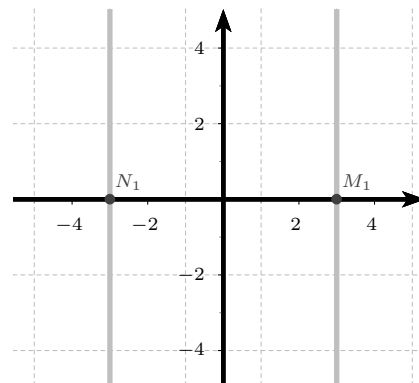
Représentent-ils des droites ?

Solution : On utilise dans cet exercice les propriétés algébriques de la valeur absolue.

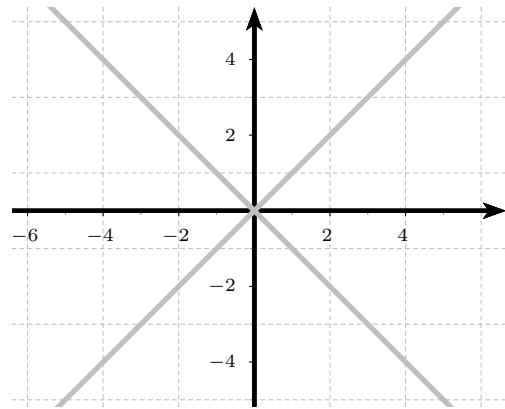
1. $|x| = 3$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$; or, l'ensemble des points $M(3, y)$ du plan est, lorsque y varie, la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $M_1(3, 0)$.

De même, l'ensemble des points $N(-3, y)$ du plan est, lorsque y varie, la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $N_1(-3, 0)$.

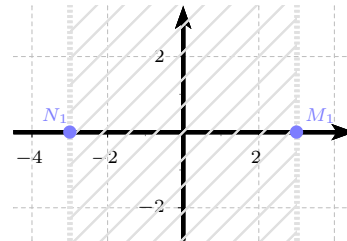
L'ensemble solution est ici la réunion de deux droites.



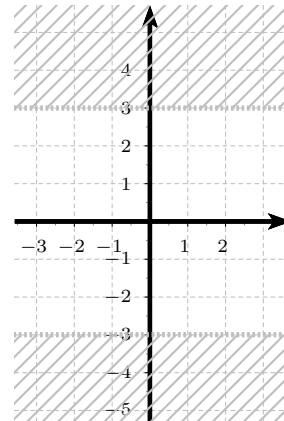
2. $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $-x = y$. On reconnaît les équations des deux bissectrices du repère. L'ensemble solution est là encore la réunion de deux droites.



3. $|x| < 3$ est équivalent à $-3 < x < 3$; or, l'ensemble des points $M(x, y)$ lorsque $-3 < x < 3$ et y varie dans $\mathbb{R}$, est la "bande" du plan de frontières les droites (exclues) de la première question de l'exercice et contenant le point $O(0, 0)$.



4. Par un raisonnement analogue au précédent, on peut montrer que l'ensemble des points $N(x, y)$ pour lesquels $|y| < 3$, est la "bande" du plan de frontières les droites (exclues) d'équations $y = 3$ et $y = -3$ (parallèles à l'axe des abscisses) et contenant le point $O(0, 0)$. Les solutions de l'inéquation $|y| \geq 3$ constituent ainsi le complémentaire de cette bande dans le plan, frontières comprises.



Exercice 9.

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y = 1$.

1. Trouver les équations cartésienne et paramétrée de la droite symétrique à $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe des y et ensuite, par rapport à l'origine. On la note $\mathcal{D}'$. Concevoir un schéma de cette situation.
2. Trouver les équations cartésienne et paramétrée de la droite symétrique à $\mathcal{D}$ par rapport à la droite d'équation $y = 2x - 1$ et ensuite, par rapport au point $A(1, -2)$. On la note $\mathcal{D}''$. Concevoir un schéma de cette situation.

Solution : L'exercice propose de composer des transformations, ici des symétries, dont il faut se rappeler qu'elles transforment des droites en des droites. Plus précisément, les images de deux points distincts d'une droite donnée sont distinctes et définissent la droite image.

1. Notons E le symétrique de C par rapport à l'axe des ordonnées et E' le symétrique de E par rapport à l'origine du repère. Remarquons que B appartenant à l'axe de la première symétrie, il est sa propre image par cette symétrie; puis son symétrique par rapport à O étant noté B' , l'image

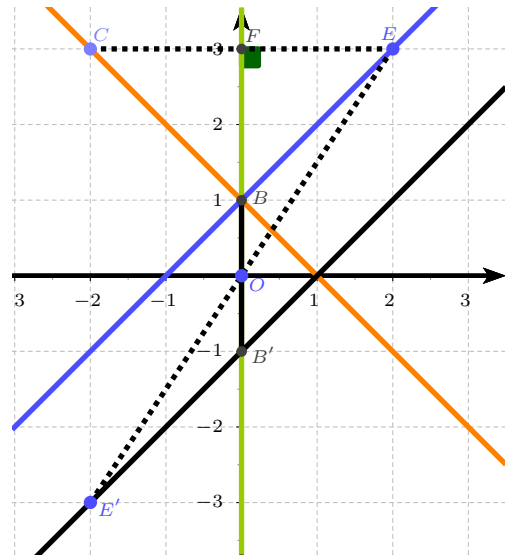
$\mathcal{D}'$ de la droite $\mathcal{D}$ est $(B'E')$.

Par les calculs :

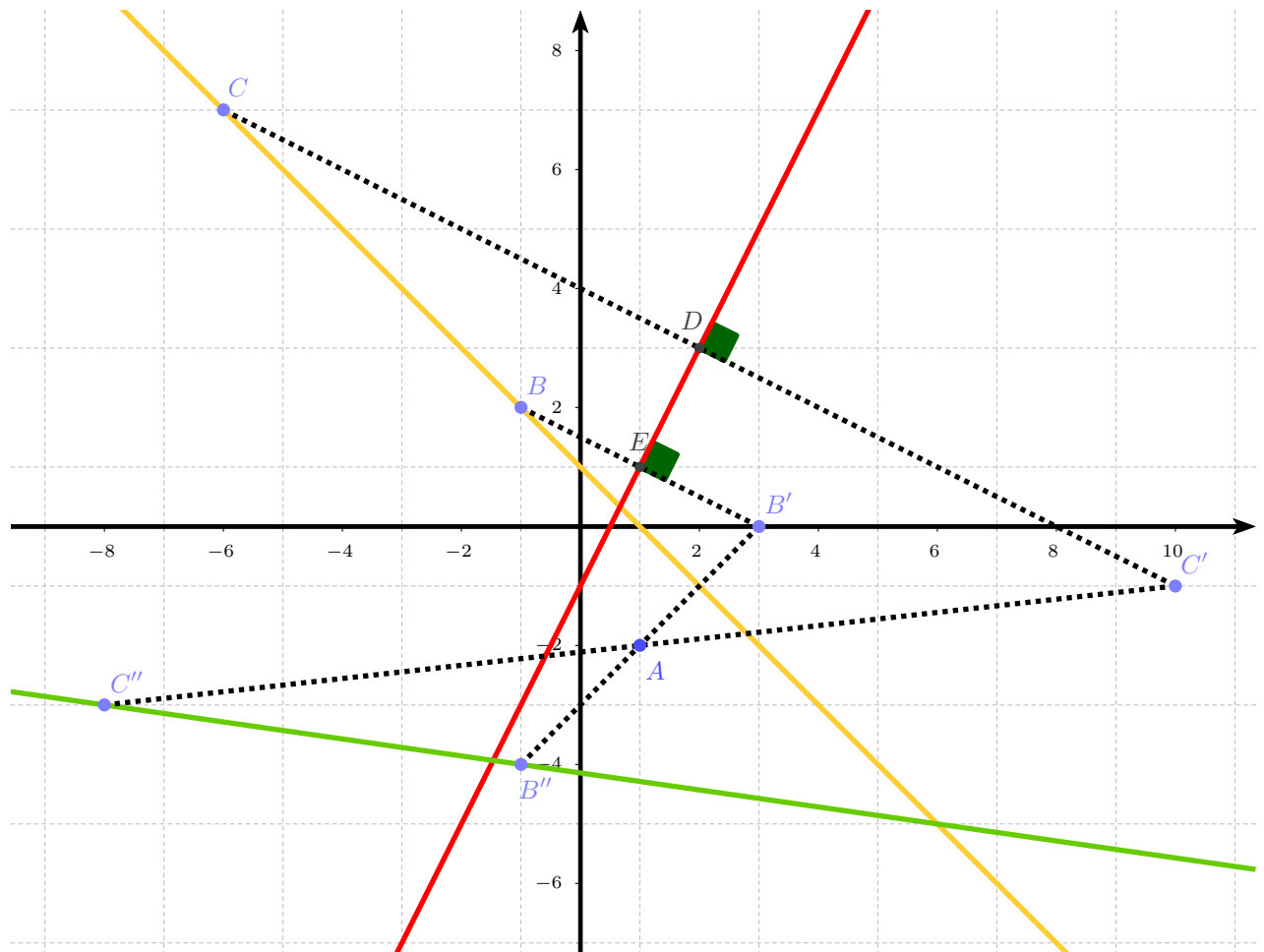
Le point $C(-2; 3)$ a pour image évidente le point $E(2; 3)$. A son tour, ce point $E(2; 3)$ a pour image $E'(-2; -3)$.

Sachant $B'(0; -1)$, une équation cartésienne de la

droite $\mathcal{D}'$, c'est à dire de la droite $(B'E')$, est donc, en utilisant les méthodes des premiers exercices :
 $\mathcal{D}' : x - y - 1 = 0$, auquel correspond le système paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \end{cases}$



2. Notons C' le symétrique de C par rapport à la droite "rouge" δ d'équation $y = 2x - 1$ et C'' le symétrique de C' par rapport au point A . De même, notons B' le symétrique de B par rapport à la droite δ et B'' le symétrique de B' par rapport au point A ; dès lors, l'image $\mathcal{D}''$ de la droite $\mathcal{D}$ est $(B''C'')$.



Par les calculs :

Pour tout réel α , considérons le point $M(\alpha; -\alpha + 1)$ de la droite $\mathcal{D}$ et notons H le projeté orthogonal de M sur la droite δ , M' le symétrique de M par rapport à cette droite, enfin M'' le symétrique de M' par rapport à A .

Le résultat suivant sera très utile : Si I est milieu des points A et B alors on a pour leurs abscisses $x_B = 2x_I - x_A$ et pour leurs ordonnées : $y_B = 2y_I - y_A$.

Équation de (MH) : un vecteur directeur de δ étant $\vec{u}(1; 2)$, le produit scalaire $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}$ rendu nul conduit à l'équation cherchée : $x + 2y + \alpha - 2 = 0$.

Coordonnées de H : les coordonnées de H étant notées $(x_H; y_H)$, elles vérifient le système :

$$\begin{cases} y_H = 2x_H - 1 \\ x_H + 2y_H + \alpha - 2 = 0 \end{cases}$$

Sa résolution apporte les valeurs : $H(\frac{1}{5}(4 - \alpha); \frac{1}{5}(3 - 2\alpha))$.

Coordonnées de M' : le point H est milieu de $[MM']$; on obtient les coordonnées de M' :

$$\left(\frac{1}{5}(8 - 7\alpha); \frac{1}{5}(1 + \alpha) \right)$$

Coordonnées de M'' : le point A est milieu de $[M'M'']$; on obtient les coordonnées de M'' :

$$\left(\frac{1}{5}(2 + 7\alpha); -\frac{1}{5}(21 + \alpha) \right)$$

Exemples : ces exemples sont ceux de la figure.

- En choisissant $\alpha = -6$, le point M devient le point $C(-6; 7)$ de la figure. Après calculs, on déduit $M' = C'(10; -1)$ et $M'' = C''(-8; -3)$.
- En choisissant $\alpha = -1$, le point M devient le point $B(-1; 2)$ de la figure. Après calculs, on déduit $M' = B'(3; 0)$ et $M'' = B''(-1; -4)$.

Conclusions : on cherche une relation "affine" entre l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point N de la droite image $\mathcal{D}''$. On a donc :

$$x = \frac{1}{5}(2 + 7\alpha) \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{5}(21 + \alpha)$$

Multiplions x par $-\frac{1}{7}$; il vient :

$$-\frac{1}{7}x = -\frac{2}{35} - \frac{1}{5}\alpha$$

Additionnons, pour retrouver y , le réel $-\frac{145}{35}$ et nous obtenons :

$$-\frac{1}{7}x - \frac{145}{35} = y$$

et en simplifiant :

$$-\frac{1}{7}x - \frac{29}{7} = y$$

finalemt une équation cartésienne de $\mathcal{D}''$ apparaît :

$$x + 7y + 29 = 0$$

où l'on observe que cette droite est dirigée par $\vec{w}(-7; 1)$ et passe par $B''(-1; -4)$. Son système paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = -4 + t \end{cases}$$

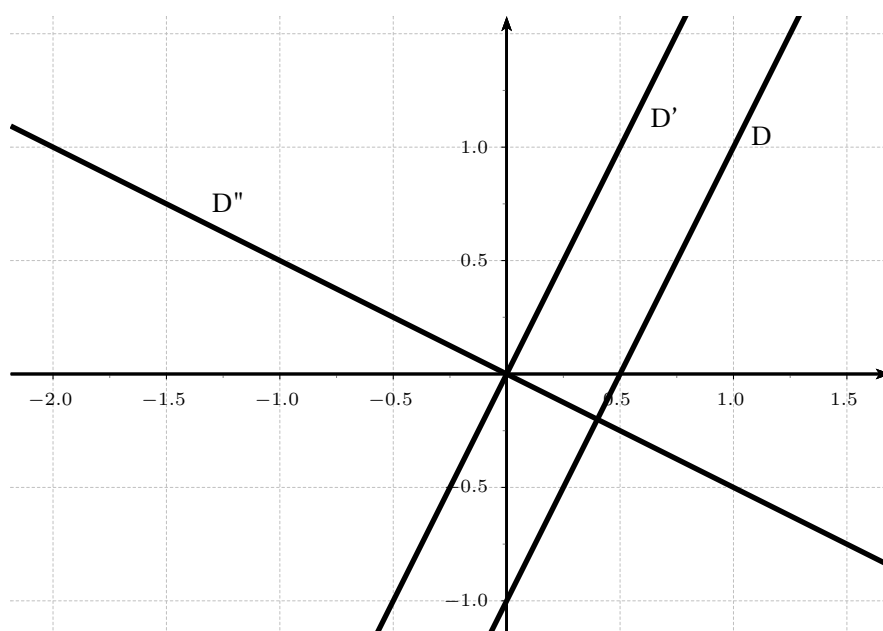
Exercice 10.

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

1. Trouver les équations cartésienne et paramétrée de la droite $\mathcal{D}'$, parallèle à $\mathcal{D}$ et qui passe par l'origine du repère.
2. Trouver les équations cartésienne et paramétrée de la droite $\mathcal{D}''$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et qui passe par l'origine.
3. Représenter dans le même repère les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

Solution

1. Le vecteur $\vec{n} = (2; -1)$ (resp. $\vec{u} = (1; 2)$) est normal (resp. directeur) à la droite $\mathcal{D}$. Il s'ensuit que l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ est donc $2x - y = 0$ et son équation paramétrée, $(x(t); y(t)) = (t; 2t)$.
2. Concernant la droite $\mathcal{D}''$, les rôles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont inversés et par conséquent, tenant compte qu'elle passe par l'origine, son équation cartésienne est $x + 2y = 0$ et son équation paramétrée, $(x(t); y(t)) = (2t; -t)$.
3. Représentation de ces droites :



Exercice 11.

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A\left(1; \frac{11}{6}\right)$ et la droite $\mathcal{D}$, d'équation $2x + 3y - 1 = 0$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$, parallèle à $\mathcal{D}$ et qui passe par A .
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}''$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et qui passe par A .
3. Déterminer le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$.

Solution

1. Deux droites parallèles admettent les mêmes vecteurs normaux. L'équation de la droite de vecteur normal $\vec{n} = (2; 3)$ et qui passe par le point A est donc

$$2(x - 1) + 3\left(y - \frac{11}{6}\right) = 0,$$

soit

$$2x + 3y - \frac{11}{2} = 0.$$

- Un vecteur orthogonal à $\vec{n}$ pourrait être $\vec{n}' = (3; -2)$. L'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}''$ est donc, $3(x-1) - 2\left(y - \frac{11}{6}\right) = 0$, c'est-à-dire, $3x - 2y + \frac{2}{3} = 0$.
- Les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

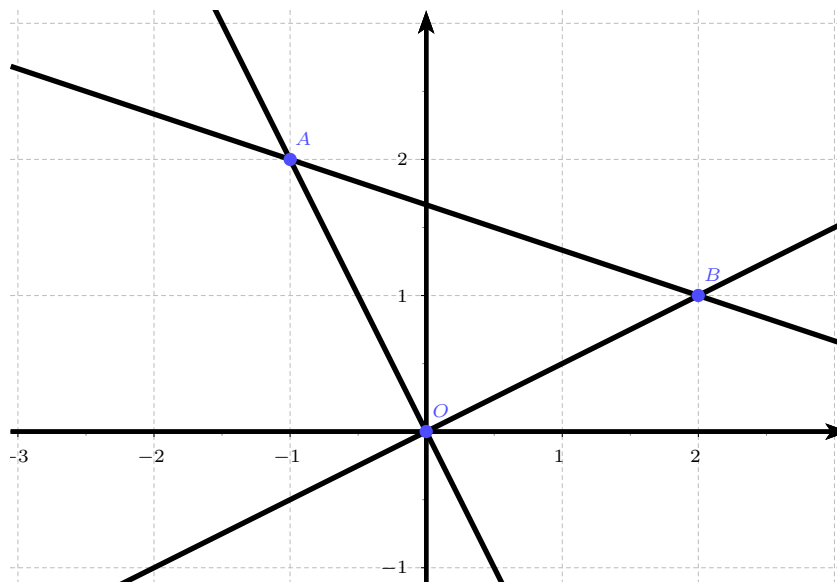
dont l'unique solution est $(x, y) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 12.

- Représenter le triangle $\mathcal{T}$, de sommets $O(0; 0)$, $A(-1; 2)$ et $B(2; 1)$ dans un repère orthonormé.
- Trouver les équations cartésiennes des droites (OA) , (OB) et (AB) .
- En déduire que le triangle $\mathcal{T}$ est rectangle en O .
- Est-il isocèle?

Solution

- Représentation graphique :



- Aucune de ces droites n'est verticale. Leurs coefficients directeurs sont donc finis et égaux respectivement à $\frac{2}{-1} = -2$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1-2}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$. Par conséquent, les équations cartésiennes (ici, réduites) des droites (OA) , (OB) et (AB) sont respectivement

$$y = -2x, \quad y = \frac{1}{2}x$$

et

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x - (-1)),$$

soit,

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

- Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires car le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .
 - On vérifie aisément que les longueurs des côtés $[OA]$ et $[OB]$ sont toutes les deux égales à $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ unités du repère. Le triangle $\mathcal{T}$ est donc rectangle isocèle.
-

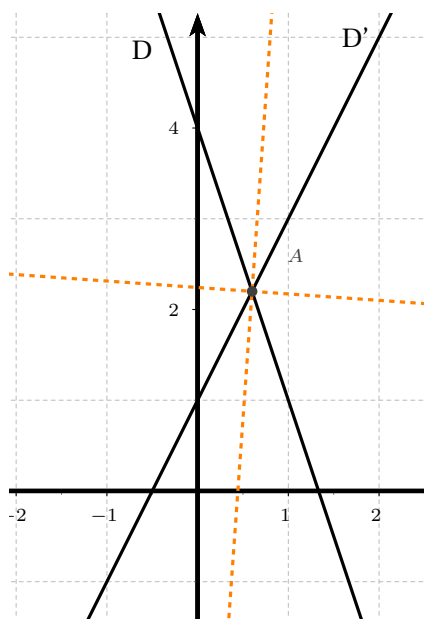
Exercice 13.

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, concourantes au point A . On suppose que leurs équations cartésiennes sont respectivement $3x + y - 4 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$.

1. Représenter les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dans un repère orthonormé.
2. Trouver les coordonnées du point A .
3. Soit M un point du plan et $(x_M; y_M)$ sa représentation dans un repère orthonormé. Calculer en fonction de x_M et de y_M sa distance à la droite $\mathcal{D}$, puis sa distance à la droite $\mathcal{D}'$.
4. En déduire les équations cartésiennes des deux droites bissectrices des quatre angles définis par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Solution

1. Représentation graphique :



soit,

$$(3 - 2\sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y - (4 + \sqrt{2}) = 0 \quad \text{et} \quad (3 + 2\sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y - (4 - \sqrt{2}) = 0.$$

Ces deux bissectrices sont représentées par les droites en pointillé.

2. Les coordonnées du point A s'obtiennent en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{soit } x_A = \frac{3}{5} \text{ et } y_A = \frac{11}{5}.$$

3. D'après le rappel de cours, les distances du point $M(x_M; y_M)$ aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont respectivement à $\frac{|3x_M + y_M - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$ et $\frac{|2x_M - y_M + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$, respectivement.

4. Sachant que la bissectrice d'un angle est l'ensemble de points équidistants des côtés de cet angle, les équations cartésiennes des bissectrices des deux angles que forment les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont définies par :

$$\frac{|3x_M + y_M - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \pm \frac{|2x_M - y_M + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

Exercice 14.

On reprend les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies dans l'exercice précédent.

1. Donner des vecteurs directeurs de ces droites.
2. En déduire leurs équations paramétrées.
3. En utilisant ces dernières équations, trouver les coordonnées du point d'intersection A .

Solution

1. Les vecteurs directeurs de ces droites sont orthogonaux à leurs vecteurs normaux qui sont respectivement $(3; 1)$ et $(2; -1)$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{D}'$) pourrait donc être $(1; -3)$ (respectivement, $(1; 2)$).

2. Choisissons d'abord un point de passage de chacune des deux droites, par exemple le point commun A . Ainsi, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations paramétrées, les expressions suivantes :

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\frac{3}{5} + 3t; \frac{11}{5} + t\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\frac{3}{5} + 2t; \frac{11}{5} - t\right).$$

3. Attention, dans les expressions paramétrées des droites, il n'y a aucune raison que les paramètres soient les mêmes. Autrement dit, un point commun à deux droites pourrait ne pas correspondre à la même valeur du paramètre t , s'agissant d'un point de $\mathcal{D}$ ou de $\mathcal{D}'$. La question est donc de savoir s'il existe deux paramètres t et t' tels que

$$\left(\frac{3}{5} + 3t; \frac{11}{5} + t\right) = \left(\frac{3}{5} + 2t'; \frac{11}{5} - t'\right).$$

La réponse est donnée par les valeurs $t = t' = 0$.

Remarque

Prenons deux autres expressions paramétrées des droites $\mathcal{D}$ ou de $\mathcal{D}'$, par exemple,

$$\left(\frac{18}{5} + 3t; \frac{16}{5} + t\right) \text{ et } \left(-\frac{7}{5} + 2t'; \frac{16}{5} - t'\right).$$

En égalisant les abscisses et ordonnées, on obtient le système aux inconnues t et t' :

$$\begin{cases} 3t - 2t' = -\frac{2}{5} \\ t + t' = 0, \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(t; t') = (-1; 1)$ qui, après substitution dans les équations paramétrées, nous donnent les coordonnées du point A .

Exercice 15.

Déterminer l'angle formé par les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations paramétrées respectives :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \alpha' t + a' \\ y(t) = \beta' t + b' \end{cases}$$

Solution

L'angle formé entre deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, noté θ , est égal à celui compris entre leurs vecteurs directeurs $\vec{u} = (\alpha; \beta)$ et $\vec{u}' = (\alpha'; \beta')$.

Pour calculer ce dernier, on utilise les expressions analytique et géométrique du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \alpha\alpha' + \beta\beta' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}'\| \cos(\vec{u}, \vec{u}').$$

Remarquons que cet angle, défini en fonction du choix des vecteurs directeurs, pourrait être θ ou $\pi - \theta$. Par exemple, pour l'angle θ formé par les droites paramétrées par

$$t \mapsto (\sqrt{3}t; t) \text{ et } t \mapsto ((\sqrt{3} + 1)t; (1 - \sqrt{3})t)$$

est déterminé par la relation

$$\cos(\theta) = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, l'angle pourrait être $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 16.

Soit a, b et c trois nombres non nuls. Montrer que le quadrilatère délimité par les quatre droites d'équations

$$ax + by + c = 0, \quad ax - by + c = 0, \quad -ax + by + c = 0, \quad -ax - by + c = 0$$

est un losange.

Solution

Si l'on note d_1, d_2, d_3 et d_4 respectivement les droites définies par les équations de l'exercice, on remarque que d_1 et d_4 d'une part et d_2 et d_3 , d'autre part, sont parallèles car les droites de chacune de ces paires possèdent des vecteurs normaux colinéaires.

On en déduit que le quadrilatère en question est un parallélogramme.

Par ailleurs, les points de concours des droites d_1 et d_2 et d_3 et d_4 se trouvent sur l'axe des x et ceux des droites d_1 et d_3 et ensuite, d_2 et d_4 sont sur l'axe des y . Il s'ensuit que, les sommets de ce parallélogramme se trouvant sur les axes du repère orthonormé, ses diagonales sont perpendiculaires. En conclusion, le quadrilatère est bien un losange.

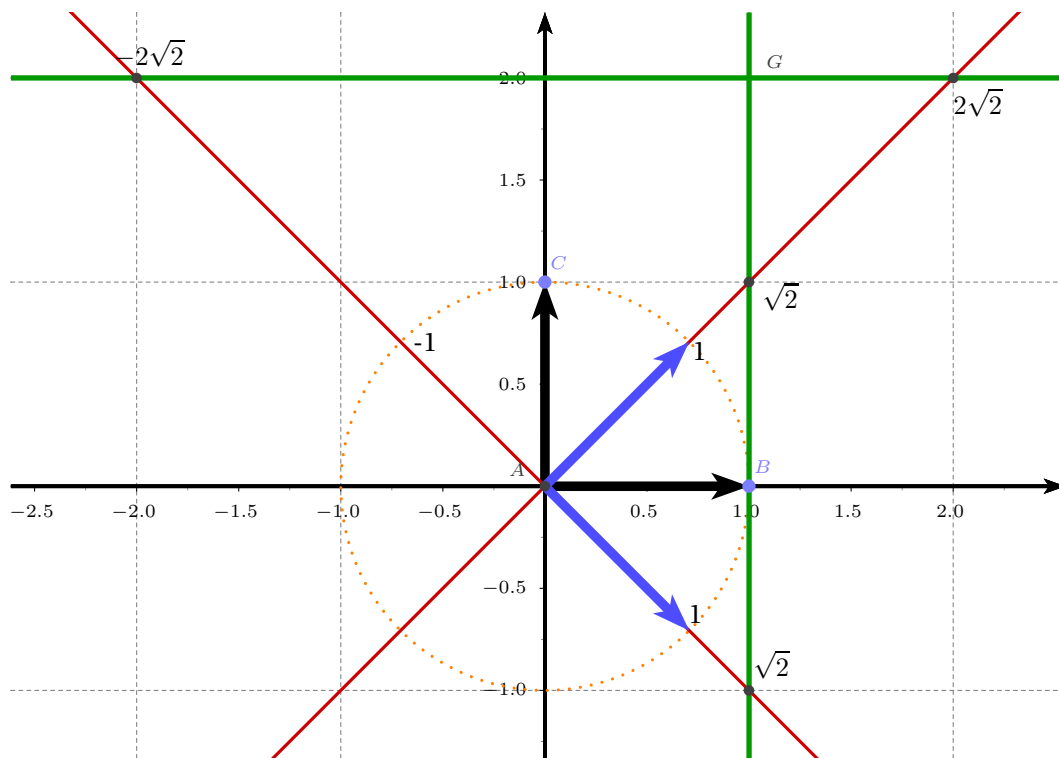
Exercice 17.

On munit le plan $\mathcal{P}$ de deux repères orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{i}', \vec{j}')$, notés respectivement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Tout point M du plan $\mathcal{P}$ est alors identifié au couple $(x; y)$ par rapport au repère $\mathcal{R}$ et $(x'; y')$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$. On pose $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ et $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

1. Représenter graphiquement les deux repères dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations (dans $\mathcal{R}$) $x + y = 0$ et $x - y = 0$. Que deviennent-elles dans le repère $\mathcal{R}'$?
3. Exprimer les coordonnées x' et y' d'un point M quelconque du plan $\mathcal{P}$ en fonction de x et y .
4. Soit $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ deux droites d'équations (dans $\mathcal{R}$) $x - 1 = 0$ et $y - 2 = 0$. Que deviennent-elles dans le repère $\mathcal{R}'$?
5. Les droites $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ peuvent-elles définir un nouveau repère $\mathcal{R}''$ du plan $\mathcal{P}$?
6. Exprimer dans le repère $\mathcal{R}''$ les coordonnées x'' et y'' d'un point M quelconque du plan $\mathcal{P}$ en fonction de x et de y .

Solution

1. Représentation graphique :



2.

Il est important de remarquer qu'une droite d'équation paramétrée $(x(t); y(t))$ dans le repère $\mathcal{R}$ est l'ensemble de points M tels que

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

alors que dans le repère $\mathcal{R}'$, on aurait

$$\overrightarrow{OM} = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}'.$$

Par conséquent, sachant que les équations paramétrées des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(t; -t)$ et $(t; t)$, leurs points M_1 et M_2 vérifient :

$$\overrightarrow{OM}_1 = t(\vec{i} - \vec{j}) = \sqrt{2}t\vec{j}' \text{ et } \overrightarrow{OM}_2 = t(\vec{i} + \vec{j}) = \sqrt{2}t\vec{i}'.$$

Les équations cartésiennes des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, dans le repère $\mathcal{R}'$ sont respectivement $x' = 0$ et $y' = 0$.

3. De l'égalité : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$, on déduit : $\overrightarrow{OM} = x'(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}) + y'(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})$, puis :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\vec{j}$$

4. Les équations paramétrées des droites $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(1; t)$ et $(t; 2)$, leurs points M'_1 et M'_2 vérifient :

$$\overrightarrow{OM'_1} = \vec{i} + t\vec{j} = \sqrt{2}(\vec{i}' + \vec{j}') + t\sqrt{2}(\vec{i}' - \vec{j}') = \sqrt{2}((1+t)\vec{i}' + (1-t)\vec{j}')$$

$$\overrightarrow{OM'_2} = t\vec{i} + 2\vec{j} = \sqrt{2}t(\vec{i}' + \vec{j}') + 2\sqrt{2}(\vec{i}' - \vec{j}') = \sqrt{2}((2+t)\vec{i}' + (t-2)\vec{j}').$$

Leurs équations cartésiennes sont respectivement :

$$x' + y' = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x' - y' = 2\sqrt{2}.$$

5. Dans la mesure où les droites $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ sont sécantes, elles peuvent engendrer un nouveau repère qui serait d'origine le point G ; deux vecteurs unitaires directeurs respectifs de chacune d'entre elles termineraient d'engendrer ce repère.
6. Il vient assez facilement : $x'' = x - 1$ et $y'' = y - 2$ en choisissant un repère orthonormé direct.

Exercice 18.

Soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points distincts dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Donner, en fonction de leurs coordonnées, une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient alignés.

Solution

La question revient à montrer l'existence d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ qui contiendrait les trois points, c'est-à-dire vérifiée par les trois points

$$(S) \quad \begin{cases} ax_A + by_A + c = 0, \\ ax_B + by_B + c = 0, \\ ax_C + by_C + c = 0. \end{cases}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$, le système (S) équivaut à $MX = 0$, avec $X \neq 0$,

puisque le vecteur normal (a, b) ne doit pas être nul. Il en découle une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points soient alignés : le déterminant de la matrice M est nul :

$$(x_A y_B - x_B y_A) - (x_A y_C - x_C y_A) + (x_B y_C - x_C y_B) = 0.$$