
Introduction à la notion de nombres complexes

A- Définitions

Définition 1 On admettra qu'un nombre complexe z s'écrit de manière unique $x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i est un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$. On dit alors que le nombre réel x est la **partie réelle** de z et le nombre réel y est sa **partie imaginaire**.

On note $\Re(z) = x$ et $\Im(z) = y$.

Définition 2 Deux nombres complexes sont **égaux** si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. L'addition et la multiplication de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont définies par :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'),$$

$$z \cdot z' = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + x' \cdot y).$$

et ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$. Mais attention, pas de relation d'ordre compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$: **on ne peut pas parler du signe d'un nombre complexe !**

Définition 3 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + iy$. Le nombre complexe $x - iy$ est dit **conjugué** de z et est noté $\bar{z}$.

Propriétés

Pour tous z, z_1 et z_2 nombres complexes, on a : $\bar{\bar{z}} = z$, $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

De plus, si $z_2 \neq 0$, alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Définition 4 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + iy$ un nombre complexe. Le **module** de z , noté $|z|$, est le nombre réel positif ou nul $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété importante : $z\bar{z} = |z|^2$

Remarque : si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$

B- Représentation géométrique

On construit une bijection entre les nombres complexes et les points du plan $\mathcal{P}$, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto M_z(\Re(z), \Im(z)) \end{cases}$$

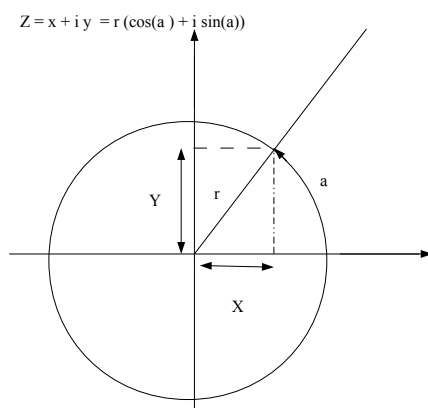
Le point M_z s'appelle **l'image** de z et z **l'afixe** de M_z .

Par extension on dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour **afixe** z .

Si A et B sont deux points d'afixe z_A et z_B , alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'afixe z_u et z_v , alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z_u + z_v$.

Si z est un nombre complexe, le **module** de z , noté $|z|$ est alors la **longueur** du vecteur d'afixe z , et un **argument** de z est l'angle entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$, si M est le point d'afixe z .



C- Écriture sous forme trigonométrique, théorème de De Moivre

Soit $a = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe de module 1 ; on peut l'écrire sous la forme $a = \cos \theta + i \sin \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire tout nombre complexe z **non nul** sous la forme

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta),$$

où r est son **module** et où θ est un de ses arguments. L'argument est défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1 (De Moivre) Pour tout nombre complexe z non nul, si θ est un argument quelconque de z :

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

Pour θ un nombre réel on note :

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit alors $re^{i\theta}$. On utilise les règles de calcul sur l'exponentielle réelle et l'égalité $i^2 = -1$ pour calculer avec l'exponentielle complexe.

La formule de De Moivre devient : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Propriété Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z peuvent s'exprimer en fonction de z et de $\bar{z}$:

$$\mathcal{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } \mathcal{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Ce qui s'énonce aussi par les **formules d'Euler** : pour tout réel x

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$