
S'exercer sur la notion de nombres complexes

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z ci-dessous :

- (a) $(2i + z)(z + i(3 - z)) = 0$;
- (b) $i\bar{z} + 7 = 2z + 2i$.

Exercice 2

a) Montrer que l'équation (E) : $z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$ admet une solution imaginaire pure. En déduire une factorisation du premier membre de cette équation sous forme d'un facteur du premier degré et d'un facteur du second degré, puis résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Calculer $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et $(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, puis, en posant $Z = z^2$, résoudre $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 3

a) Soit le nombre complexe $z = 2 - 2i = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Calculer r et θ , puis écrire z sous forme exponentielle.

b) Ecrire sous formes trigonométriques et exponentielles les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

c) Écrire en notation exponentielle les complexes suivants : $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1 - i$, $z_5 = 2 + 2i$, $z_6 = \frac{1}{i}$, $z_7 = -1 + i\sqrt{3}$. Les représenter ensuite dans le plan complexe.

Exercice 4

Ecrire le nombre complexe $z_1 = ie^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle (on pourra utiliser deux méthodes). On donne aussi $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_3 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $z_1 z_2 z_3$, puis $z_1(z_2)^2$ (donner les résultats sous forme exponentielle).

Exercice 5

On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire les nombres complexes z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$, en notation exponentielle. On justifiera ces écritures.

Exercice 6

Soit $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 + i$.

- 1) Calculer $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
 - 2) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, puis calculer $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.
 - 3) Dédire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.
-

Exercice 7

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit A le point d'affixe $5i$ et B le point d'affixe -2 .

- 1) Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) .
 - 2) Déterminer l'ensemble de tous les points M d'affixe z tel que $|z - 5i| = |z + 2|$.
-

Exercice 8

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère E l'ensemble de point M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 5$

- 1) Le point d'affixe $4 - 2i$ appartient-il à E ?
 - 2) Déterminer l'ensemble E .
 - 3) Déterminer, s'il existe, a nombre réel tel que le point A de coordonnées $(a; 4)$ appartiennent à E .
-

Exercice 9

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z - 4 + i$ ait pour argument $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$?

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O . Soit A le point d'affixe $1 + 3i$.

À tout point M qui se trouve sur la droite (OA) , on associe le point M' le point d'affixe $z_{M'} = z_M - 3i$. Démontrer que les droites (OA) et (BM') sont parallèles.
