

S'exercer sur la notion de nombres complexes

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z ci-dessous :

- (a) $(2i + z)(z + i(3 - z)) = 0$;
 (b) $i\bar{z} + 7 = 2z + 2i$.

Réponse 1

(a) $z = -2i$ ou $z = \frac{-3i}{1-i} = \frac{3-3i}{2}$.

(b) On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels. On résout l'inéquation en éparant la partie réelle et la partie imaginaire.

On trouve que x et y doivent vérifier le système : $2x - y = 7$ et $x - 2y = 2$. On trouve $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{3}{4}$. Soit la solution complexe de l'équation

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Exercice 2

a) Montrer que l'équation (E) : $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ admet une solution imaginaire pure. En déduire une factorisation du premier membre de cette équation sous forme d'un facteur du premier degré et d'un facteur du second degré, puis résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, puis, en posant $Z = z^2$, résoudre $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Réponse 2

a) Le nombre complexe i est solution de l'équation (E). On peut factoriser le membre de gauche par $(z - i)$:

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2 - 2z + 2).$$

Si on résout $z^2 - 2z + 2 = 0$ on trouve un discriminant égal à -4 de racine complexe $2i$ et $-2i$; si on construit les racines du trinôme $z^2 - 2z + 2$, on trouve $1+i$ et $1-i$.

b) Après calcul, on obtient

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si on pose $z^2 = Z$, on a à résoudre $Z^2 + Z + 1 = 0$, qui admet pour solution

$$\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grâce au calcul précédent on en déduit que les solutions de l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ sont

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 3

- a) Soit le nombre complexe $z = 2 - 2i = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Calculer r et θ , puis écrire z sous forme exponentielle.
 b) Ecrire sous formes trigonométriques et exponentielles les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
 c) Écrire en notation exponentielle les complexes suivants : $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1 - i$, $z_5 = 2 + 2i$, $z_6 = \frac{1}{i}$, $z_7 = -1 + i\sqrt{3}$. Les représenter ensuite dans le plan complexe.

Réponse 3

- a) Le nombre réel r est le module de z et donc $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. et le nombre réel θ vérifie les équations

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Finalement

$$z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

- b) On a

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

et

$$z_2 = \bar{z}_1 = 2\left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin -\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

- c) Les nombres complexes donnés s'écrivent aussi $z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 1 = e^{i0}$, $z_3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_4 = 1 - i = \bar{z}_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_5 = 2 + 2i = 2z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_6 = \frac{1}{i} = -i = e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_7 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
-

Exercice 4

Ecrire le nombre complexe $z_1 = ie^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle (on pourra utiliser deux méthodes). On donne aussi $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_3 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $z_1 z_2 z_3$, puis $z_1(z_2)^2$ (donner les résultats sous forme exponentielle).

Réponse 4

On a

$$z_1 = ie^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Le produit $z_1 z_2 z_3$ s'effectue et donne

$$z_1 z_2 z_3 = -8e^{\frac{5i\pi}{6}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 8e^{i(\pi + \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3})} = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

et

$$z_1(z_2)^2 = 4e^{\frac{5i\pi}{6}} e^{i\pi} = 4e^{\frac{11i\pi}{6}}.$$

Exercice 5

On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire les nombres complexes z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$, en notation exponentielle. On justifiera ces écritures.

Réponse 5

On a $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Le produit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7\pi}{12}}.$$

Les justifications viennent des calculs et des valeurs des sinus et cosinus des angles qui interviennent.

Exercice 6

Soit $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 + i$.

- 1) Calculer $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
- 2) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, puis calculer $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.
- 3) Dédire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Réponse 6

1) On a

$$(\sqrt{3} - i)(1 + i) = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1).$$

2) On a

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Le produit

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3) On a donc $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ et donc, par identification de part l'unicité de l'écriture, on a

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit A le point d'affixe $5i$ et B le point d'affixe -2 .

- 1) Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) .
- 2) Déterminer l'ensemble de tous les points M d'affixe z tel que $|z - 5i| = |z + 2|$.

Réponse 7

- 1) Le point A est de coordonnées $(0; 5)$ et le point B est de coordonnées $(-2, 0)$, un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2; -5)$.
 - 2) Pour un point M d'affixe z on a : $|z - 5i| = AM$ et $|z + 2| = BM$ (longueur des vecteurs). Donc, l'ensemble de tous les points M d'affixe z tel que $|z - 5i| = |z + 2|$ est l'ensemble de tous les points M tels que $AM = BM$, c'est-à-dire, par définition, la médiatrice du segment $[AB]$.
-

Exercice 8

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère E l'ensemble de point M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 5$. 1) Le point d'affixe $4 - 2i$ appartient-il à E ?

2) Déterminer l'ensemble E .

3) Déterminer, s'il existe, a nombre réel tel que le point A de coordonnées $(a; 4)$ appartiennent à E .

Réponse 8

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère E l'ensemble de point M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 5$.

- 1) On calcule $|4 - 2i - 2 - i| = |-2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq 5$. Le point considéré n'appartient pas à E .
- 2) L'ensemble E est l'ensemble de point qui se trouve à une distance constante (5) du point d'affixe $2 + i$. Il s'agit donc d'un cercle de centre le point de coordonnées $(2; 1)$ et de rayon 5.
- 3) Le point A de coordonnées $(a; 4)$ appartient à E si $|a + 4i - 2 - i| = 5$. Or

$$|a + 4i - 2 - i| = \sqrt{(a - 2)^2 + 9}.$$

On aura $|a + 4i - 2 - i| = 5$ si et seulement si a est solution de l'équation $(a - 2)^2 + 9 = 25$, qui s'écrit encore $(a - 2)^2 = 16$ et donc

$$a - 2 = 4 \text{ ou } a - 2 = -4.$$

Ce qui fournit deux valeurs possibles $a = 6$ et $a = -2$.

Finalement les points de coordonnées $(6; 4)$ et $(-2; 4)$ appartiennent à E .

Exercice 9

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z - 4 + i$ ait pour argument $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$?

Réponse 9

On sait que, si P et Q sont deux points d'affixes respectives z_P et z_Q avec $z_P \neq z_Q$, alors $\arg(z_P - z_Q) = (\vec{u}, \overrightarrow{PQ}) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Ici, soit A le point d'affixe $z_A = 4 - i$; la condition $\arg(z - 4 + i) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est équivalente à $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble des points M cherché est donc la droite passant par A de coordonnées $(4; -1)$ et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses (c'est-à-dire de vecteur directeur $(1; 1)$) mais privée de A car il n'y a pas d'angle de vecteurs si $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O . Soit A le point d'affixe $1 + 3i$.

À tout point M qui se trouve sur la droite (OA) , on associe le point M' le point d'affixe $z_{M'} = z_M - 3i$. Démontrer que les droites (OA) et (BM') sont parallèles.

Réponse 10

Soit B le point d'affixe $-3i$. Remarquons que

$$z_{M'} - z_B = z_M - 3i + 3i = z_M$$

On a donc

$$\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{OM}$$

Comme M se trouve sur (OA) , les vecteurs $\overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, et les droites (BM') et (OA) sont parallèles.
