
Bref cours sur les fractions

1 Notion de fraction

1.1 Définition

Une EXPRESSION FRACTIONNAIRE est une écriture de la forme

$$\frac{a}{b}$$

où a et b sont deux expressions, b étant non nul. L'expression a prend le nom de NUMÉRATEUR de l'expression $\frac{a}{b}$, et l'expression b celui de DÉNOMINATEUR de la même expression $\frac{a}{b}$. Ces deux expressions sont disposées de part et d'autre d'un trait horizontal, appelé BARRE DE FRACTION.

La barre de fraction peut aussi être écrite en montant de gauche à droite, ce qui donne une autre disposition

$$a/b$$

pour écrire l'expression fractionnaire $\frac{a}{b}$.

Exemples d'expressions fractionnaires

$$\frac{2x+3}{3x-1}, \quad \frac{x+y}{2}, \quad \frac{11}{7}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{3,55}{11,3}$$

Lorsque numérateur et dénominateur de l'expression fractionnaire a/b sont des entiers relatifs (avec $b \neq 0$) on dit que a/b est une FRACTION dont la valeur est le quotient de a par b , c'est-à-dire le nombre x tel que $xb = a$.

1.2 Significations des fractions

1.2.1 Nombre de parts

Lorsque a et b sont des entiers positifs avec $a < b$, la fraction

$$\frac{a}{b}$$

représente un certain nombre de parts égales découpées dans un certain objet. Ainsi, la fraction $3/4$ est lue "trois quarts" et intervient dans des expressions du langage courant, telles que "les trois quarts du gâteau". Le numérateur représente alors le nombre de parts considéré, et le dénominateur indique le nombre de ces parts en lesquelles se décompose une unité. Par conséquent $a/1 = a$.

1.2.2 Résultat d'une division

Plus généralement, a/b représente le quotient de a par b , c'est-à-dire le résultat de la division de a par b , de sorte qu'on a

$$b \left(\frac{a}{b} \right) = a .$$

Pour $b = 1$, on retrouve $1(a/1) = a$, donc $a/1 = a$.

2 Fractions égales

2.1 Définition et notation

Deux fractions, ou plus généralement deux expressions fractionnaires, a/b et c/d sont dites ÉGALES lorsque $ad = bc$. Dans ce contexte, ad est appelé le produit des extrêmes et bc le produit des moyens. L'égalité des fractions (ou des expressions fractionnaires) a/b et c/d est notée $=$, de sorte qu'on écrit

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc .$$

Exemples : Soit a un réel non nul, x et y deux réels distincts :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{12}{5} = \frac{36}{15}, \quad \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3}, \quad \frac{a}{a} = 1, \quad \frac{x^2 - y^2}{2x - 2y} = \frac{x + y}{2}$$

2.2 Fractions irréductibles

Soit a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$. On dit que la fraction a/b est SOUS FORME IRRÉDUCTIBLE s'il n'existe pas de fraction a'/b' égale à a/b telle que $|b'| < |b|$.

Exemples : Toute fraction $1/b$ est irréductible. En effet $1/b = a'/b'$ signifie $0 \neq b'$ et $b' = a'b$, donc $|b'| \geq |b|$.

Une fraction $2/b$ est irréductible si et seulement si son dénominateur b est impair.
 $3/5$ est irréductible.

Simplifier ou réduire à sa plus simple expression une fraction, c'est trouver une fraction sous forme irréductible égale à la fraction donnée.

3 Opérations sur les fractions ou expressions fractionnaires

3.1 Comparaison d'expression fractionnaires

La fraction a/b est SUPÉRIEURE À (ou PLUS GRANDE QUE) la fraction c/d si $ad > bc$ et $bd > 0$, ou aussi quand $ad < bc$ et $bd < 0$. On note alors

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} .$$

3.2 Addition ou soustraction d'expressions fractionnaires de même dénominateur

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b} \quad \frac{a}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a - a'}{b} .$$

3.3 Addition ou soustraction de fractions quelconques

On commence par trouver des expressions fractionnaires de même dénominateur qui soient égales aux expressions données (c'est ce que l'on appelle réduire les expressions fractionnaires au même dénominateur), puis on applique la règle précédente.

3.4 Multiplication d'expressions fractionnaires

$$\frac{a}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

3.5 Inverse d'une expression fractionnaire

L'inverse de la fraction a/b n'existe que si $a \neq 0$, et est égal à b/a . D'après la règle précédente, le produit de a/b et de b/a est en effet $(ab)/(ab) = 1/1 = 1$.

3.6 Division d'expressions fractionnaires

Diviser par une expression fractionnaire signifie multiplier par l'inverse de cette expression. Donc

$$\frac{a}{b} \div \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'},$$

qu'on peut écrire sous la forme (dite de fractions en cascade)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a'}{b'}} ,$$

égale donc à l'expression $\frac{ab'}{ba'}$.