

Les puissances entières et rationnelles d'un nombre réel

Rappelons les définitions et notations suivantes.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul.
4. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La présence d'une *étoile* en haut, à droite du symbole prive l'ensemble de nombres indiqué de l'élément 0. La présence du signe $\ll - \gg$ (resp. $\ll + \gg$) en bas, à droite du symbole prive l'ensemble de ses nombres strictement positifs (resp. négatifs).

Ainsi,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\},$$

et

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$$

1 Puissance entière d'un nombre réel

Définition 1.1 Soit a un nombre réel quelconque et m un entier naturel. On définit la puissance m -ième de a , par récurrence sur m , en posant :

$$\begin{cases} a^0 = 1 & \text{et} \\ a^m = a^{m-1} \times a & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

L'entier m est appelé *exposant*.

Ainsi $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = a \times a$, etc.

Visuellement, il est commode de représenter la puissance m -ième, pour $m \geq 1$, de a par :

$$a^m = \underbrace{a \times a \cdots \times a}_{m \text{ fois}}.$$

À titre conventionnel, nous admettons que $0^0 = 1$.

Propriétés des puissances

1. Soit m et n deux entiers naturels et a un nombre réel. Après calcul, nous constatons que

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Par exemple, $(-3)^5(-3)^3 = (-3)^8$.

Une conséquence immédiate de cette propriété est l'égalité :

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Par exemple, $((-7)^5)^3 = (-7)^{15}$.

2. Soit a et b deux nombres réels quelconques et m , un entier naturel. Il s'ensuit (commutativité de la multiplication) que

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

Par exemple, $(-3\pi)^4 = (-3)^4(\pi)^4$ et $(-3)^8 = ((-1)(3))^8 = (-1)^8(3^8) = 3^8$.

Définition 1.2 Soit a un nombre réel non nul, n un entier naturel strictement positif. On définit la puissance $(-n)$ -ième de a en posant :

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

L'entier $-n$ est appelé exposant.

Remarques

1. Avec les mêmes notations, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ainsi, pour un nombre réel non nul a , $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, etc.

2. Cette dernière définition permet d'étendre la définition d'une puissance d'un nombre réel à un exposant entier relatif.

En effet, pour a un nombre réel, et m un entier naturel, si $m \geq 0$ alors a^m est donné par la première définition et si m est négatif alors, il existe $n \geq 0$, tel que $a^m = a^{-n}$ qui est défini grâce à la définition précédente.

Propriétés

1. Soit a et b deux nombres réels quelconques. On suppose que $b \neq 0$. On a, pour m entier relatif,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Par exemple, $\left(\frac{-3}{11}\right)^5 = \frac{(-3)^5}{11^5} = -\frac{3^5}{11^5}$ et $\left(\frac{-1}{3}\right)^6 = \frac{(-1)^6}{3^6} = \frac{1}{3^6}$.

2. Soit a un nombre réel non nul et m et n deux entiers relatifs, on a alors :

$$a^{m+n} = a^m \times a^n.$$

Par exemple, $2^{5-7} = 2^{-2} = 2^5 2^{-7} = \frac{32}{128}$.

3. En particulier, si a est un nombre réel non nul, on a :

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \times a^{-1} = a \times \frac{1}{a} = 1.$$

2 Puissance rationnelle d'un nombre réel

Définition 2.1 Soit q un entier naturel, non nul. On appelle racine q -ième d'un nombre réel a , tout nombre réel b tel que $b^q = a$.

Exemples

1. Tout nombre réel strictement positif possède deux racines 2-ièmes, on dit racines carrées : une racine carrée positive, notée $\sqrt{a}$, et l'autre négative, $-\sqrt{a}$. Ainsi les racines carrées de 4 sont $\sqrt{4} = 2$ et $-\sqrt{4} = -2$.
2. Tout nombre réel (pas forcément positif) possède une seule racine 3-ième (on dit racine cubique). Elle est notée $\sqrt[3]{a}$.
On a ainsi :

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{27} = 3.$$

Proposition-Notations

Soit a un nombre réel et q un entier naturel.

1. Si a est strictement positif et q est pair alors a possède deux racines q -ièmes réelles, l'une positive notée $\sqrt[q]{a}$ et l'autre négative $-\sqrt[q]{a}$.
2. Si q est impair, la racine q -ième réelle de a (notée $\sqrt[q]{a}$) est unique.

Remarque

Soit q un entier naturel non nul, la racine q -ième de 0 vaut 0.

Définition 2.2 Soit a un nombre réel positif et q un entier naturel non nul. Soit b l'unique nombre réel positif tel que $b^q = a$. On pose

$$a^{\frac{1}{q}} = b.$$

Soit p un entier relatif. On pose

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p.$$

Le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est dit exposant.

On a, par exemple,

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 2, \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Remarques

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quand a est positif $a^{\frac{1}{q}}$ est la racine réelle q -ième positive de a . Autrement dit, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si a est strictement négatif alors l'expression $a^{\frac{1}{q}}$ n'est pas définie contrairement à l'expression $\sqrt[q]{a}$ qui désigne la racine q -ième de a .

Propriétés

Toutes les propriétés énoncées sur les puissances entières sont encore vraies pour les puissances rationnelles.

1. Quels que soient les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, non nuls, et a , un nombre réel positif. On a :

$$a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{p'}{q'}} = \left(a^{p'q + pq'} \right)^{\frac{1}{qq'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}}.$$

Exemple

$$\text{On a : } (23)^{\frac{2}{3}} (23)^{\frac{-3}{2}} = (23)^{\frac{-5}{6}}.$$

2. Soit a et b deux nombres réels positifs. Pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on a :

$$a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}.$$

Exemples

$$\text{On a : } \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^4 = 3^6 \quad \text{et} \quad (11)^{\frac{4}{3}} (17)^{\frac{4}{3}} = (11 \cdot 17)^{\frac{4}{3}} = (187)^{\frac{4}{3}}.$$