

S'exercer sur les puissances

Avertissement : les exercices comportant des **** sont plus théoriques et moins numériques que les autres.

Exercice 1 Calculer à la main

a)

$$(3^4)^2 ; \quad 4^2 - 4^3 ; \quad 2 \times 7^2 - 7 \times 2^2$$

b)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 ; \quad \frac{125^2}{5^4} ; \quad \frac{18^2}{45^2}$$

c)

$$\left(\frac{3^4}{3^6}\right)^2 ; \quad (3^{-4})^5 ; \quad (3^{-6})^{-2} ; \quad \frac{5^{-2} \times (3^{-4})^2}{(5^{-2} \times 3^3)^3}$$

Exercice 2 Sans calculatrice donner l'écriture scientifique (c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$) de chaque nombre

$$382000 ; \quad 400 \times 10^{-6} ; \quad 0,0000455 \times 10^4 ; \quad \frac{15 \times 10^{-4}}{10^{-2}}$$

$$0,03 \times 10^{-7} \times 0,5 \times 10^2 ; \quad \frac{9 \times 10^{-4} \times 4,5 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-6} \times 5} ; \quad \frac{25 \times 10^6 \times 8 \times 10^2}{2 \times 10^2}$$

Exercice 3 Soit a un nombre réel non nul. Écrire sous forme a^n avec $n \in \mathbb{Z}$ les nombres suivants :

$$U = a^2 \times a^{-7} \times a^3 \times a ; \quad V = (a^5)^{-3} \times (a^{-4})^{-2} ; \quad W = \frac{(a^3)^{-2} \times a^2}{a^7 \times (a^{-1})^6}$$

Exercice 4 Cocher la ou les bonne(s) réponse(s):

a) On a $(3 \times 7)^6 =$

$$\boxed{} 3 \times 7^6 \quad \boxed{} 3^6 \times 7^6 \quad \boxed{} 21^6 \quad \boxed{} 10^6$$

b) Soit y un nombre réel. On a $\frac{y^5}{y^3} =$

$$\boxed{} y^2 \quad \boxed{} y^{-2} \quad \boxed{} y^{15}$$

c) Soit a un réel et x, y et z trois entiers naturels.

On a $(a^x)^y \times (a^{-x})^z =$

$$\boxed{} 1 \text{ si } z = y \quad \boxed{} a^{z+y} \quad \boxed{} a^{x(y-z)}$$

Exercice 5

- Calculer la somme des chiffres du nombre P avec $P = 5^{2015} \times 2^{2018}$.
- Calculer le nombre de 0 consécutifs dans $35!$ ($35! = 35 \times 34 \times 33 \times \dots \times 2$)
- Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et soit x, y, z trois nombres rationnels. Écrire sous la forme a^α , avec α un nombre rationnel, le nombre $(a^x)^{y-z} \times (a^y)^{z-x} \times (a^z)^{x-y}$.

4. Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs et x, y, z trois nombres rationnels tels que $a = b^x, b = c^y$ et $c = a^z$. Démontrer que $xyz = 1$.

Exercice 6 Trouver l'erreur qui s'est glissée dans les calculs suivants :

on a $(-1)^2 = (1)^2$ et donc, comme il s'agit d'une égalité entre nombres positifs on peut écrire :

$$((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = ((1)^2)^{\frac{1}{6}} \text{ ou encore } (-1)^{\frac{2}{6}} = 1^{\frac{2}{6}}.$$

Mais $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, on obtient donc l'égalité $((-1))^{\frac{1}{3}} = ((1))^{\frac{1}{3}}$, et donc $1 = -1$.

**** **Exercice 7**

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que a et b sont non nuls et $a^2 \neq b^2$.

a) Simplifier l'expression suivante :

$$E = \frac{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} + \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}}{\frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} - \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}}$$

b) À quelles conditions sur a et b l'expression F suivante a-t-elle un sens ? La simplifier.

$$F = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}.$$

**** **Exercice 8**

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que le nombre $3n - 1$ n'est pas le carré d'un nombre entier naturel.
b) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$; démontrer que les nombres $a^x + a$ et $a^x - a$ sont toujours pairs.
c) Soit $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$; a-t-on $a^n + a^n + a^p = a^{2n}$? Justifier.

Spécial racine carré

Exercice 1

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$, où a désigne un entier naturel.

$$\sqrt{18}; \sqrt{50}; \sqrt{98}; \sqrt{162}.$$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b désignent deux entiers naturels, b tant le plus petit possible.

$$\sqrt{40}; \sqrt{99}; \sqrt{54}; \sqrt{63}; \sqrt{32}; \sqrt{675}.$$

Exercice 3

Écrire les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$, où a et b désignent deux entiers naturels, b étant non nul.

$$\frac{4}{3}; \frac{9}{7}; \frac{16}{5}.$$

Exercice 4

Écrire les nombres suivants sous la forme $\frac{\sqrt{a}}{b}$, ou $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, où a , b et c désignent des entiers naturels non nuls.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{7}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \sqrt{\frac{4}{5}}; \sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{144}.$$

Exercice 5

Calculer

$$\sqrt{2} \times \sqrt{50}; \sqrt{12} \times \sqrt{3}; \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{500}.$$

Exercice 6

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a , b et c désignent des entiers naturels.

$$A = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5}); B = 5\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}); C = (\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

Exercice 7

A-t-on $a = b$ ou $a = -b$ pour les nombres a et b suivants :

$$1. \ a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \quad b = -\sqrt{2} - 1 ;$$

$$2. \ a = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} ;$$

Exercice 8

Soit

$$E = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}.$$

Donner une expression simple de E , sans dénominateur.