

S'exercer sur les puissances : corrigé des exercices

Exercice 1 Calculer à la main

a)

$$(3^4)^2 = 6561 ; \quad 4^2 - 4^3 = -48 ; \quad 2 \times 7^2 - 7 \times 2^2 = 70$$

b)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} ; \quad \frac{125^2}{5^4} = 25 ; \quad \frac{18^2}{45^2} = \frac{4}{25}$$

c)

$$\left(\frac{3^4}{3^6}\right)^2 = \frac{1}{81} ; \quad (3^{-4})^5 = \frac{1}{3486784401} ; \quad (3^{-6})^{-2} = 531441 ; \quad \frac{5^{-2} \times (3^4)^2}{(5^{-2} \times 3^3)^3} = \frac{25}{3}$$

Exercice 2 Sans calculatrice donner l'écriture scientifique (c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$) de chaque nombre :

$$\text{On a } 382000 = 3,82 \times 10^5 ; \quad 400 \times 10^{-6} = 4 \times 10^{-4} ; \quad 0,0000455 \times 10^4 = 4,55 \times 10^{-1} ;$$

$$\frac{15 \times 10^{-4}}{10^{-2}} = 1,5 \times 10^{-1} ; \quad 0,03 \times 10^{-7} \times 0,5 \times 10^2 = 1,5 \times 10^{-7} ;$$

$$\frac{9 \times 10^{-4} \times 4,5 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-6} \times 5} = 2,7 \times 10^{-2} ; \quad \frac{25 \times 10^6 \times 8 \times 10^2}{2 \times 10^2} = 10^8$$

Exercice 3 Soit a un nombre réel non nul. Écrire sous forme a^n avec $n \in \mathbb{Z}$ les nombres suivants :

$$\text{On a } U = a^2 \times a^{-7} \times a^3 \times a = a^{-1} ; \quad V = (a^5)^{-3} \times (a^{-4})^{-2} = a^{-7} ; \quad W = \frac{(a^3)^{-2} \times a^2}{a^7 \times (a^{-1})^6} = a^{-5}$$

Exercice 4 Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :

a) On a $(3 \times 7)^6 =$ ☐ 3×7^6 ☒ $3^6 \times 7^6$ ☐ 21^6 ☐ 10^6

b) Soit y un réel. On a $\frac{y^5}{y^3} =$ ☒ y^2 ☐ y^{-2} ☐ y^{15}

c) Soit a un réel et x, y et z trois entiers naturels.
On a $(a^x)^y \times (a^{-x})^z =$ ☒ 1 si $z = y$ ☐ a^{z+y} ☒ $a^{x(y-z)}$

Exercice 5

1. Calculer la somme des chiffres du nombre P avec $P = 5^{2015} \times 2^{2018}$.

$P = 5^{2015} \times 2^{2015+3} = 5^{2015} \times 2^{1025} \times 2^3 = (5 \times 2)^{2015} \times 2^3 = 8 \times 10^{2015}$ et donc la somme des chiffres de P est égale à 8.

2. Calculer le nombre de 0 consécutifs dans $35!$ ($35! = 35 \times 34 \times 33 \times \dots \times 2$)

Dans le produit $35!$ il y a 32 fois exactement le facteur 2 et 8 fois le facteur 5. Or, pour calculer le nombre de 0 demandé il s'agit de compter le nombre d'apparition du facteur 10.

Sachant que $2 \times 5 = 10$, il y a autant de fois le facteur 10 que le facteur 5. Comme on retrouve donc 8 fois le facteur 5, le nombre $35!$ contient 8 zéros consécutifs

($35! = 10333147966386144929666651337523200000000$)

3. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et soit x, y, z trois nombres rationnels. Écrire sous la forme a^α , avec α un nombre rationnel, le nombre $(a^x)^{y-z} \times (a^y)^{z-x} \times (a^z)^{x-y}$.

$$(a^x)^{y-z} \times (a^y)^{z-x} \times (a^z)^{x-y} = a^{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}.$$

Par ailleurs $x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = xy - xz + yz - yx + zx - zy = 0$ et donc $\alpha = 0$.

4. Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs et x, y, z trois nombres rationnels tels que $a = b^x$, $b = c^y$ et $c = a^z$. Démontrer que $xyz = 1$.

On a : $a = b^x = (c^y)^x = a^{zyx}$ et donc $xyz = 1$.

Exercice 6 Trouver l'erreur qui s'est glissée dans les calculs suivants :

On a $(-1)^2 = 1^2$ et donc, comme il s'agit d'une égalité entre nombres positifs on peut écrire :

$$((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = ((1)^2)^{\frac{1}{6}} \text{ ou encore } (-1)^{\frac{2}{6}} = 1^{\frac{2}{6}}.$$

Mais $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, on obtient donc l'égalité $((-1))^{\frac{1}{3}} = ((1))^{\frac{1}{3}}$, et donc $1 = -1$.

Les opérations sur les exposants rationnels non entiers de puissances ne sont définies que lorsque les nombres dont on calcule les puissances sont positifs.

******Exercice 7**

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que a et b sont non nuls.

a) Simplifier l'expression suivante :

$$E = \frac{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} + \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}}{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} - \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}}$$

Tout d'abord $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$, $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$. et donc :

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \text{ et } \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Donc le numérateur de la fraction proposée est

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}.$$

Son dénominateur est :

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$$

et finalement on trouve :

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2} = \frac{2(a^4 + b^4)}{4a^2b^2} = \frac{a^4 + b^4}{2a^2b^2}$$

b) À quelles conditions sur a et b l'expression F suivante a-t-elle un sens ? La simplifier.

On a

$$F = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$$

Pour $a+b \geq 0$ et $a-b \geq 0$, on peut calculer l'expression $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$. Autrement dit pour $a \geq |b|$. Il faut aussi que $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \neq 0$. Or $\sqrt{a+b} = -\sqrt{a-b}$ seulement si $a = b = 0$. finalement l'expression F existe si $a \geq |b|$ et $b \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$F = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} = \frac{a+b - 2\sqrt{a^2 - b^2} + a-b}{a+b - (a-b)}$$
$$F = \frac{2(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{2b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

***Exercice 8

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le nombre $3n - 1$ n'est pas le carré d'un nombre entier naturel.

Si $3n - 1$ était un carré il existerait $p \in \mathbb{N}$ tel que $3n - 1 = p^2$ ou encore $3n = p^2 + 1$

et donc il existerait un entier p tel que $p^2 + 1$ est un multiple de 3.

Mais alors les nombres p^2 et $p^2 - 1$ ne seraient pas multiples de 3.

Par ailleurs, on a $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

On utilise le fait que si l'on considère trois nombres consécutifs dans $\mathbb{N}$ l'un d'eux est forcément un multiple de trois.

Le produit $(p-1)(p+1)$ ne serait pas un multiple de 3 et donc, sur les trois nombres consécutifs $p-1$, p et $p+1$, p serait le multiple de 3 et donc p^2 aussi.

Mais comme $p^2 = 3n - 1$, on aboutit à une contradiction.

b) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$; démontrer que les nombres $a^x + a$ et $a^x - a$ sont toujours pairs.

Si a est pair alors a^x aussi et comme la somme et la différence de deux nombres pairs sont pairs on a le résultat attendu ;

Si a est impair alors a^x aussi et comme la somme et la différence de deux nombres impairs sont pairs on a aussi le résultat attendu.

c) Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$; a-t-on $a^n + a^n + a^n = a^{2n}$? Justifier.

En fait ici $a^n + a^n = 2a^n$ et non a^{2n} . Si on prend $a = 3$ et $n = 2$ par exemple, on a $3^2 + 3^2 = 18$ et $3^4 = 81$.

Spécial racine carré

Exercice 1

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$, où a désigne un entier naturel.

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}; \sqrt{50} = 5\sqrt{2}; \sqrt{98} = 7\sqrt{2}; \sqrt{162} = 9\sqrt{2}.$$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b désignent deux entiers naturels, b tant le plus petit possible.

$$\sqrt{40} = 2\sqrt{10}; \sqrt{99} = 3\sqrt{11}; \sqrt{54} = 3\sqrt{6}; \sqrt{63} = 3\sqrt{7}; \sqrt{32} = 4\sqrt{2}; \sqrt{675} = 15\sqrt{3}; \sqrt{144} = 12\sqrt{1} = 12.$$

Exercice 3

Écrire les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$, où a et b désignent deux entiers naturels, b étant non nul.

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{9}}; \frac{9}{7} = \frac{9}{\sqrt{49}}; \frac{16}{5} = \frac{16}{\sqrt{25}}.$$

Exercice 4

Écrire les nombres suivants sous la forme $\frac{\sqrt{a}}{b}$, ou $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, où a , b et c désignent des entiers naturels non nuls.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{25}; \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{20}}{5}; \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exercice 5

Calculer

$$\sqrt{2} \times \sqrt{50} = 10; \sqrt{12} \times \sqrt{3} = 6; \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{500} = 100.$$

Exercice 6

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a , b et c désignent des entiers naturels.

$$A = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 2 + \sqrt{10}; \quad B = 5\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}) = 30 - 20\sqrt{15}; \quad C = (\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 11 + 4\sqrt{10}$$

Exercice 7

A-t-on $a = b$ ou $a = -b$ pour les nombres a et b donnés ?

À chaque fois on élève a et b au carré.

1. $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, $b = -\sqrt{2} - 1$;
 $a^2 = 3 + 2\sqrt{2} = b^2$ et donc soit $a = b$ soit $a = -b$. Ici $b < 0$ et $a > 0$ et donc $a = -b$.
 2. $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$; $b^2 = 5 + 2\sqrt{6} = a^2$ et les deux nombres a et b sont positifs ;
on en déduit qu'ils sont égaux.
-
-

Exercice 8

Soit

$$E = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}.$$

Donner une expression simple de E , sans dénominateur.

On réduit au même dénominateur.

$$E = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}{7 - 3} = \frac{4\sqrt{21}}{4} = \sqrt{21}.$$
