
Fiche sur le calcul littéral

Note Soit a et u deux nombres réels, on note le produit de a par u soit au soit $a \times u$.

Priorité des opérations

Les règles de priorité sont les suivantes :

- les calculs contenus entre parenthèses (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
- les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
- les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions ;
- Lorsque les parenthèses sont effectuées, lire les multiplications et divisions de gauche à droite. Ensuite, même chose pour les additions et soustractions.

Exemple

$$7 + 2 \times 6 = 7 + 12 = 19$$

Le calcul $2 \times 5^2 \times 2 - [3 + 4 \times (11 - 6 + 3) - 1/2 + 2]$ s'effectue de la manière suivante :

$$A = 2 \times 25 \times 2 - [3 + 4 \times 8 - 1/2 + 2] \text{ (priorité aux calculs entre parenthèses } 11 - 6 + 3 \text{)}$$

$$A = 100 - [3 + 4 \times 8 - 1/2 + 2] \text{ (priorité à la multiplication } 4 \times 8 \text{ sur la soustraction précédant les crochets)}$$

$$A = 100 - [3 + 32 - 1/2 + 2] \text{ (priorité à la multiplication } 4 \times 8 \text{)}$$

$$A = 100 - 37 + 1/2 \text{ (priorité à la somme } 3 + 32 - 1/2 + 2 \text{ entre crochets)}$$

$$A = 63 - 1/2 \text{ (différence finale)}$$

$$A = (126 - 1)/2$$

$$A = 125/2.$$

Sommes et produits

Propriété [distributivité de la multiplication sur l'addition] Soit a , b et k trois nombres réels. On a l'égalité suivante :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Par exemple, si x désigne un nombre réel, on peut écrire $2(x+4) = 2x+8$ ou encore $x(1+x) = x+x^2$. On peut aussi écrire $5x^2+10x+30 = 5(x^2+2x+6)$, ou encore $2x^2+4x = 2x(x+2)$.

Remarques

- 1) Si $k = -1$, on écrit $-1(a+b) = -(a+b) = -a-b$. Par exemple pour x appartenant à $\mathbb{R}$, $-(x+12) = -x-12$.
- 2) Soit a , b et k trois nombres réels. On a aussi, $(a+b) \times k = a \times k + b \times k$.
- 3) Soit a , b et k trois nombres réels. Comme $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ on a aussi $k \times a + k \times b = k \times (a+b)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. **Développer** le produit $2(x+4)$ c'est l'écrire $2x+8$.

En effet *développer un produit c'est le transformer en sommes*.

Factoriser l'expression $6x^3+18x^2+3x$ c'est l'écrire $3x(2x^2+6x+1)$.

En effet *factoriser une somme c'est la transformer en produits*.

Propriété Soit a , b et k_1 et k_2 quatre nombres réels. On a

$$(k_1+k_2) \times (a+b) = k_1 \times a + k_2 \times a + k_1 \times b + k_2 \times b$$

Exemple Soit x et y deux nombres réels, on a l'égalité $(2+x)(4-y) = 8-2y+4x-xy$. Ce qui correspond au développement du produit $(2+x)(4-y)$ en la somme $8-2y+4x-xy$.

Pour factoriser, il peut être utile de **réduire** une expression :

$$(2+x)(4-x) - 13x - 8 = 8 - 2x + 4x - x^2 - 13x - 8 = -x^2 + 11x = x(-x+11).$$

Identités remarquables

Propriété On a les identités remarquables suivantes : Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Elles permettent de développer et factoriser des expressions.

Exemples

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour **développer** l'expression $(2+x)^2$ on l'écrit $4+4x+x^2$ en utilisant la première identité.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(1-x)(1+x) = 1-x^2$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour **factoriser** l'expression $\alpha^2+2\alpha+1$ on l'écrit $(\alpha+1)^2$ en utilisant la première identité.

Outils de factorisation

Propriété Soit a , b , c et x quatre nombres réels, $a \neq 0$. Soit α un nombre réel. Si en remplaçant x par α dans l'expression $E = ax^2+bx+c$ on trouve 0 alors on peut mettre $(x-\alpha)$ en facteur dans

l'expression E .

Exemple Si $E = 2x^2 - 6x + 4$ et si on remplace x par 2, $E = 2 \times 4 - 6 \times 2 + 4 = 0$. De plus si x vaut 1 alors $E = 2 - 6 + 4 = 0$. On peut mettre $(x-2)$ et $(x-1)$ en facteur dans l'expression E : $E = 2(x-1)(x-2)$.

Exemple Soit x , y et z des nombres réels et soit l'expression $E = x^2 + x(-y - z) + yz$. Lorsqu'on remplace x par y ou par z , on trouve $E = 0$ et donc $E = (x - y)(x - z)$.

Quelques exemples

1) Soit x et y deux nombres réels, $2x + xy - 8zx = 2x(1 + \frac{1}{2}y - 4z)$ ou encore $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$.

2) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{4}\}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$. L'expression $A = \frac{(4x + y)(4z - 1)}{4x - 1} + \frac{-4yz + y}{4x - 1}$, peut s'écrire :

$$A = \frac{(4x + y)(4z - 1) - 4yz + y}{4x - 1} = \frac{16xz - 4x + 4yz - y - 4yz + y}{4x - 1} = \frac{16xz - 4x}{4x - 1}.$$

3) Si a et b sont deux nombres réels

$$\frac{2a - 1}{5} + \frac{10b + 1}{2} = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5} + \frac{10}{2}b + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}a + 5b + \frac{3}{10}.$$

4) On peut écrire $0,5x^2 - 8x + 1,5 = 0,5(x^2 - 16x + 3)$.