
S'exercer sur le calcul littéral : corrigé des exercices

Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes.

a) On a $(2x + 1)(3 - x) = 2x \times 3 - 2x \times x + 3 - x = 6x - 2x^2 + 3 - x = -2x^2 + 5x + 3$.

b) On a $(x + 1)^2 + (2x - 1)^2 = (x^2 + 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) = 5x^2 - 2x + 2$.

c) On a $(5 - 2x)(3 - x) - 3(3 - 2x) = 15 - 5x - 6x + 2x^2 - 9 + 6x = 6 - 5x + 2x^2$.

d) On a $(x - 2)(2x - 1)(4 - x) = (2x^2 - x - 4x + 2)(4 - x) = (2x^2 - 5x + 2)(4 - x) = 8x^2 - 2x^3 - 20x + 5x^2 + 8 - 2x$.

Et donc $(x - 2)(2x - 1)(4 - x) = -2x^3 + 13x^2 - 22x + 8$.

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) On a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ b) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

c) On a $(5 - 2x)(3 - x) - 3(3 - x) = (3 - x)(5 - 2x - 3) = (3 - x)(2 - 2x) = 2(3 - x)(1 - x)$.

d) On a $(5 - 2x)(2x - 1) + (2 - 4x) = (5 - 2x)(2x - 1) - 2(2x - 1) = (2x - 1)(5 - 2x - 2) = (2x - 1)(3 - 2x)$.

e) On a $(x - 1)(3x + 2) + (2x + 3)(1 - x) = (x - 1)(3x + 2) - (2x + 3)(x - 1) = (x - 1)(3x + 2 - (2x + 3)) = (x - 1)(3x + 2 - 2x - 3) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

$$f) 9x^2 - 12x + 4 + (4 - 3x)(3x - 2) = (3x - 2)^2 + (4 - 3x)(3x - 2) = (3x - 2)(3x - 2 + 4 - 3x) = 2(3x - 2).$$

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$. Factoriser, puis simplifier :

a) Pour $a \neq 2$,
$$\frac{a^2 - 4}{a - 2} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{a - 2} = a + 2.$$

b) Pour $a \neq \frac{1}{3}$,
$$\frac{2 - 6a}{3a - 1} = \frac{-2(3a - 1)}{3a - 1} = -2.$$

c) Pour $a \neq 8$,
$$\frac{(5 - a)(a - 3) + 3(a - 3)}{a - 8} = \frac{(a - 3)(5 - a + 3)}{a - 8} = \frac{-(a - 3)(a - 8)}{a - 8} = 3 - a.$$

d) Pour $a \neq 0$,
$$\frac{(1 - a)(a - 2) + (2 - 2a)}{a} - 3 + a = \frac{(1 - a)(a - 2 + 2)}{a} - 3 + a = \frac{(1 - a)a}{a} - 3 + a$$

Et donc après simplification
$$\frac{(1 - a)(a - 2) + (2 - 2a)}{a} - 3 + a = 1 - a - 3 + a = -2.$$

Exercice 4

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $E = x^4 + 3x^2$
On a $E = x^2(x^2 + 3)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $X = x^2$ factoriser $F = x^4 - 4x^2 + 4$.
On a $F = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2 = (x^2 - 2)^2 = ((x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}))^2 = (x + \sqrt{2})^2(x - \sqrt{2})^2$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $E = x^3 - 5x^2 - x + 5$. En remarquant que $E = 0$ pour $x = 5$, factoriser E .
On peut donc écrire

$$E = (x - 5)(x^2 + ax + b)$$

avec a et b deux nombres réels.

Pour trouver les valeurs de a et b on procède par identification.

On écrit les égalités :

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 = x^3 + ax^2 + bx - 5x^2 - 5ax - 5b = x^3 + (a - 5)x^2 + (b - 5a)x - 5b.$$

On en déduit que $a - 5 = -5$, $b - 5a = -1$ et $-5b = 5$.

Et donc que $b = -1$ et $a = 0$, c'est-à-dire que $E = (x - 5)(x^2 - 1) = (x - 5)(x + 1)(x - 1)$.

d) **Soit** $x \in \mathbb{R}$. **Factoriser** $x^2 - 10x + 25 + (x - 5)$.

On a $x^2 - 10x + 25 + (x - 5) = (x - 5)^2 + (x - 5) = (x - 5)(x - 5 + 1) = (x - 5)(x - 4)$.

Exercice 5

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) **Soit** $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(7 + 5x)^2 - 10 + 5x + x^3 = 49 + 70x + 25x^2 - 10 + 5x + x^3 = x^3 + 25x^2 + 75x + 39.$$

b) **Soit** $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(7 - \sqrt{x})^2 - (3\sqrt{x} - 1)^2 - 8\sqrt{x} = 49 - 14\sqrt{x} - x - (9x - 6\sqrt{x} + 1) - 8\sqrt{x} = 49 - 14\sqrt{x} - x - 9x + 6\sqrt{x} - 1 - 8\sqrt{x} = 48 - 10x - 16\sqrt{x}$.

Exercice 6 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}} = -1$$

$$\text{On a } \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}} = \frac{(x + y - 2\sqrt{xy}) - (x + y + 2\sqrt{xy})}{4\sqrt{xy}} = \frac{-4\sqrt{xy}}{4\sqrt{xy}} = -1.$$