

La proportionnalité

1 Généralités

Définition 1.1 Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. Les listes de nombres réels $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont proportionnelles lorsqu'il existe un nombre réel non nul λ , tel que,

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}, y_i = \lambda x_i.$$

Le nombre λ est appelé coefficient de proportionnalité.

Tableau de proportionnalité Il est pratique de traduire une situation de proportionnalité à l'aide d'un tableau à deux lignes appelé **tableau de proportionnalité** :

x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	y_2	$\dots$	y_n

Comme par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 1,2 \\ \hline 6 & 15 & 3,6 \\ \hline \end{array} \quad \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{3,6}{1,2} = 3.$$

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité; le coefficient de proportionnalité est égal à 3.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 11 & 1,2 & 1,3 \\ \hline 40 & 55 & 6 & 5,15 \\ \hline \end{array} \quad \frac{40}{8} = \frac{55}{11} = \frac{6}{1,2} = 5, \text{ mais } \frac{5,15}{1,3} \neq 5.$$

Il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité.

- Si les listes de nombres réels (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont proportionnelles alors, pour tout couple (a, b) de nombres réels, les listes $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2)$ et $(y_1, y_2, ay_1 + by_2)$ le sont aussi. Cela se traduit par le tableau de proportionnalité suivant :

x_1	x_2	$ax_1 + bx_2$
y_1	y_2	$ay_1 + by_2$

Représentation graphique

Si

x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	y_2	$\dots$	y_n

 est un tableau de proportionnalité, alors tous les points $M_i(x_i; y_i)$ avec

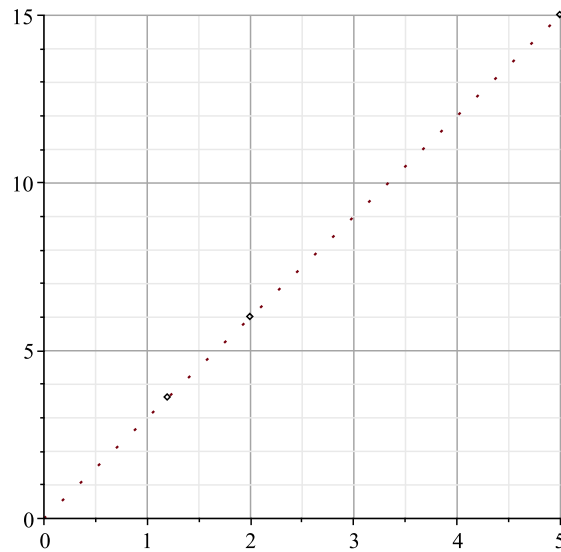
$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont alignés avec l'origine du repère.

La droite contenant ces points a pour coefficient directeur le coefficient de proportionnalité.

Exemples. Si on reprend le tableau

2	5	1, 2
6	15	3, 6

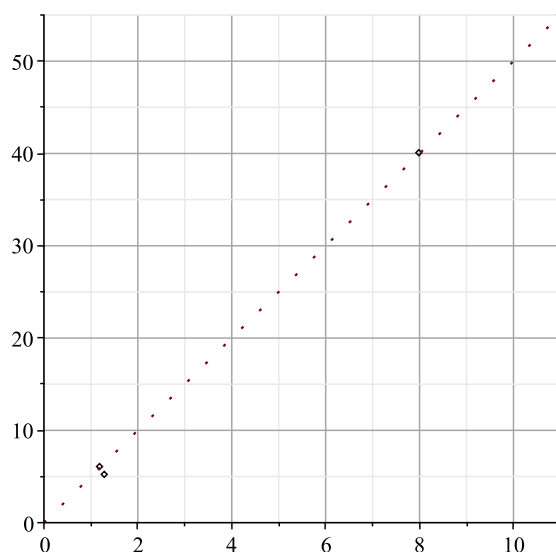
, les points $M_1(2; 6)$, $M_2(5; 15)$ et $M_2(1, 2; 3, 6)$ sont alignés. Ils appartiennent à la droite d'équation $y = 3x$.



En revanche, si on reprend le tableau

8	11	1, 2	1, 3
40	55	6	5, 15

, les points $M_1(8; 40)$, $M_2(11; 55)$, $M_3(1, 2; 6)$ et $M_4(1, 3; 5, 15)$ ne sont tous pas alignés.



2 Quatrième proportionnelle

2.1 Égalité des produits en croix

Soit x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre nombres réels non nuls.

Si on a $x_1 y_2 = x_2 y_1$ alors

x_1	x_2
y_1	y_2

 est un tableau de proportionnalité.

Réciproquement si les listes (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont proportionnelles alors $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Dans ces conditions, le produit $x_1 y_2 = x_2 y_1$ est appelé *égalité des produits en croix*.

2.2 Recherche d'une quatrième proportionnelle

Dans une situation de proportionnalité, on connaît généralement trois valeurs et on cherche la quatrième. Cette inconnue est alors appelée *quatrième proportionnelle*.

Si a, b et c sont des nombres réels donnés non nuls, et que l'on cherche un nombre réel x tels que

a	x
b	c

 soit un tableau de proportionnalité alors $x = \frac{a \times c}{b}$.

3 Pourcentages

3.1 Appliquer un pourcentage

Soit a un nombre réel strictement positif. Calculer $a\%$ d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par $\frac{a}{100}$.

Remarque Il s'agit d'une recherche de quatrième proportionnelle :

a	$b \times \frac{a}{100}$
100	b

Exemple Calculer 20% de 72, c'est calculer $72 \times \frac{20}{100}$ qui vaut 14,4. On a alors le tableau de proportionnalité

20	14,4
100	72

3.2 Chercher un pourcentage

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. Pour déterminer quel pourcentage de b représente a on calcule $\frac{a \times 100}{b}$.

Remarque Il s'agit d'une recherche de quatrième proportionnelle :

a	$\frac{a \times 100}{b}$
b	100

Exemple Un article coûtant 125 euros est vendu avec une réduction de 18,75 euros.

Pour trouver le pourcentage de remise, on calcule $\frac{18,75 \times 100}{125} = 15$. La remise est de 15%. On a alors le tableau de proportionnalité

18,75	15
125	100

3.3 Augmentation, réduction, coefficient multiplicateur

Soit a un nombre réel strictement positif.

Augmenter une quantité de $a\%$ revient à la multiplier par $1 + \frac{a}{100} = \frac{100 + a}{100}$.

Diminuer une quantité de $a\%$ revient à la multiplier par $1 - \frac{a}{100} = \frac{100 - a}{100}$.

Les coefficients $\frac{100 + a}{100}$ et $\frac{100 - a}{100}$ sont appelés *coefficients multiplicateur*.

Exemple

Si on annonce une augmentation de 2% sur un article qui coûte 25 euros, son nouveau prix sera de

$$25 \times \frac{102}{100} = 25,5 \text{ euros.}$$

Si on annonce une diminution de 2% sur un article qui coûte 25 euros, son nouveau prix sera de

$$25 \times \frac{98}{100} = 24,5 \text{ euros.}$$

Attention aux idées reçues

Si un capital de 1000 euros subit une baisse de 10%, la somme détenue après cette baisse est alors de 900 euros. Si cette nouvelle valeur (de 900 euros) du capital augmente de 10% le capital détenu après cette hausse sera de 990 euros. Le capital final ne sera pas de 1000 euros. Attention, les pourcentages ne s'ajoutent pas.

4 Taux d'évolution d'une quantité positive

4.1 Définition

Définition 4.1 On considère une quantité de valeur initiale positive x_I qui subit une évolution (augmentation ou réduction) pour arriver à une valeur finale x_F .

Le taux d'évolution t de cette quantité est

$$t = \frac{x_F - x_I}{x_I}.$$

L'évolution de la valeur x_F à la valeur x_I de cette quantité est appelée *évolution réciproque*.

Remarques

- 1) S'il s'agit d'une augmentation alors $t > 0$ et s'il s'agit d'une réduction alors $t < 0$.
- 2) Pour avoir le pourcentage de baisse ou d'augmentation on multiplie le taux t par 100.

Exemple Un article passe de 145 euros à 127,60 euros, $t = \frac{127,60 - 145}{145} = -0,12$. L'article a subi une baisse de 12%.

4.2 Évolutions successives

Si une quantité subit plusieurs évolutions successives alors le coefficient multiplicateur global est égal *au produit* des différents coefficients multiplicateurs.

Si ce coefficient global est strictement supérieur à 1, on a une augmentation globale et si il est strictement inférieur à 1 il s'agit d'une diminution globale.

Exemples

1) Si une quantité l subit une hausse de 8% puis une baisse de 11%, le coefficient multiplicateur global est égal à

$$\frac{100 + 8}{100} \times \frac{100 - 11}{100} = 1,08 \times 0,89 = 0,99612.$$

Cette valeur est plus petite que 1. Pour connaître le pourcentage de baisse on calcule $100 - 100 \times 0,99612 \approx 3,88$, ce qui correspond à une baisse de 3,88%.

2) Si une quantité l subit une hausse de 25% puis une baisse de 11%, le coefficient multiplicateur global est égal à

$$\frac{100 + 25}{100} \times \frac{100 - 11}{100} = 1,25 \times 0,89 = 1,1125.$$

Cette valeur est plus grande que 1. Pour connaître le pourcentage de hausse on calcule $100 \times 1,1125 - 100 \approx 11,25$, ce qui correspond à une hausse de 11,25%.

3) Si une quantité l subit une hausse de 25% puis une baisse de 25%, le coefficient multiplicateur global n'est pas égal à 1 mais à $\frac{100 + 25}{100} \times \frac{100 - 25}{100} = 1,25 \times 0,75 = 0,9375$. Cette valeur est plus petite que 1. Pour connaître le pourcentage de baisse on calcule $100 - 100 \times 0,9375 \approx 6,25$ %,

4.3 Lien entre le taux d'une évolution et celui de sa réciproque

Soit une évolution de v_I à v_F de taux t . L'évolution réciproque possède un coefficient multiplicateur inverse de celui de l'évolution directe car si $v_F = v_I(1 + t)$ alors $v_I = \frac{1}{1 + t}v_F$.

Exemple Un capital subit successivement des hausses et des baisses pour finalement passer de la somme de $v_I = 3490$ euros à $v_F = 4210$ euros. Le taux d'évolution de ce capital est donc

$$t = \frac{v_F - v_I}{v_I} = \frac{4210 - 3490}{3490} \approx 0,206.$$

Le capital a donc subi une hausse d'environ 20,6%. Le coefficient multiplicateur de cette augmentation est donc $1 + 0,206 = 1,206$.

L'évolution réciproque de ce capital a un taux

$$t' = \frac{v_I - v_F}{v_F} = \frac{3490 - 4210}{4210} \approx -0,1710.$$

Si le capital passe de 4210 euros à 3490 euros alors il baisse d'environ 17,10%. Le coefficient multiplicateur est donc de $1 - 0,1710 = 0,829$. On a $t' \approx \frac{1}{t}$, formule que l'on peut aussi utiliser pour calculer t' .