

Les inéquations de degré un ou de degré deux à une inconnue

1 Préliminaires : manipuler des inégalités

Proposition 1.1 Pour tous nombres réels a, b, c, d et m , on a :

- 1) $a \leq b \iff a - b \leq 0$
- 2) $a \geq b \iff b \leq a \iff b - a \leq 0$
- 3) $a \leq b \iff a + m \leq b + m$
- 4) si $m > 0$, alors : $a \leq b \iff am \leq bm$
- 5) si $m < 0$, alors : $a \leq b \iff am \geq bm$
- 6) si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors : $a + c \leq b + d$
- 7) si a et b sont tous les deux positifs, alors $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$
- 8) si a et b sont tous les deux négatifs, alors $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$

Exemples

Soit a un nombre réel tel que : $-3 \leq a \leq 4$. On a alors $-21 \leq 7a \leq 28$ et

$$-28 \leq -7a \leq 21 ; a^2 \leq 16 ; -28 \leq a^2 - 7a \leq 37.$$

Soit c un nombre réel tel que : $-2 \leq c \leq 1$. On a alors

$$0 \leq 5c^2 \leq 20 \text{ et } -7 \leq 5c^2 - 7c \leq 34.$$

Remarques importantes

- 1) Si l'on dispose de deux inégalités *de même sens*, $a \leq b$ et $c \leq d$, on peut les *ajouter membre à membre* et en déduire $a + c \leq b + d$.
- 2) Si l'on dispose de deux inégalités *de même sens*, $a \leq b$ et $c \leq d$, **et** si tous les nombres a, b, c et d sont *positifs*, on peut les *multiplier membre à membre* et en déduire $ac \leq bd$.
- 3) Attention : Le résultat n'est plus vrai si l'un des nombres est négatif.

Proposition 1.2 Soient $G(x)$ et $D(x)$ deux expressions en x . Pour manipuler des inéquations avec des racines carrées, on utilise les règles suivantes.

- a) $\sqrt{G(x)} \leq D(x) \iff G(x) \leq D(x)^2 \text{ et } G(x) \geq 0 \text{ et } D(x) \geq 0$.
- b) $\sqrt{G(x)} \geq D(x) \iff (D(x) \leq 0 \text{ et } G(x) \geq 0) \text{ ou } (D(x) \geq 0 \text{ et } D(x) \geq G(x)^2)$.
- c) $\sqrt{G(x)} \leq \sqrt{D(x)} \iff G(x) \leq D(x) \text{ et } G(x) \geq 0$.

2 Inéquations à une inconnue

• Inéquations linéaires à une inconnue

Dans $\mathbb{R}$, toutes les inéquations linéaires à une inconnue se ramènent à la forme fondamentale :

$$(1) \quad ax \leq b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels et } x \text{ l'inconnue.}$$

Résoudre l'inéquation $ax \leq b$, c'est trouver l'ensemble de tous les nombres réels x tels que l'inégalité $ax \leq b$ soit vraie. Un tel nombre réel x est appelé une solution de l'inéquation (1).

Soit S l'ensemble des solutions de l'inéquation (1).

Si $a > 0$, $ax \leq b \iff x \leq \frac{b}{a}$. On a donc $S = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$.

Si $a < 0$, $ax \leq b \iff x \geq \frac{b}{a}$. On a donc $S = \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$.

Si $a = 0$ et $b \geq 0$, alors tout réel x est solution de (1). On a donc $S = \mathbb{R}$.

Si $a = 0$ et $b < 0$, alors aucun réel x n'est solution de (1). On a donc $S = \emptyset$.

Exemples Soit l'inéquation dans $\mathbb{R}$, $-3x < 7$. Comme $-3x < 7 \iff x > \frac{7}{-3}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x < 7$ est $S = \left] -\frac{7}{3}, +\infty \right[$.

Soit maintenant l'inéquation $2x - 4 < 0$. Comme $2x - 4 < 0 \iff 2x < 4 \iff x < \frac{4}{2}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - 4 < 0$ est $S =]-\infty, 2[$.

• Inéquations non linéaires à une inconnue

Pour résoudre les inéquations non linéaires de degré 2 à une inconnue, on peut utiliser la règle du signe du trinôme ou encore factoriser l'expression, si c'est possible, et utiliser la règle du signe d'un produit. On peut aussi résoudre des inéquations de degré supérieur ou égal à 2 en factorisant lorsque c'est possible.

Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$, on cherche à étudier le signe $ax^2 + bx + c$ pour les valeurs de x . On peut vouloir trouver par exemple, toutes les valeurs de x telles que $ax^2 + bx + c > 0$.

Proposition 2.1 Soit a, b, c trois nombres réels tels que a soit non nul.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'expression $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ où x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On retient que $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'expression $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a .

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'expression $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a , pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

Dans ce dernier cas, pour $x = \frac{-b}{2a}$, $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemples

1) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + 4x - 5 > 0$.

On a $a = 1$, $b = 4$ et $c = -5$. Le discriminant Δ de $x^2 + 4x - 5$ est $\Delta = 4^2 - 4(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$ et les racines sont

$$x_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-4-6}{2} = -5.$$

Comme le coefficient dominant de $x^2 + 4x - 5$ est positif, il vient que

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \iff x \in]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[.$$

On peut aussi écrire $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$ et en déduire le signe à l'aide du tableau :

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 + 4x - 5$	$+$	0	$-$	$+$

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x^2 - 2x + 5 > 0$.

On a $a = -3$, $b = -2$ et $c = 5$. Le discriminant Δ de $-3x^2 - 2x + 5$ est $\Delta = (-2)^2 - 4(-3)(5) = 4 + 60 = 64 = 8^2$ et les racines sont

$$x_1 = \frac{2-8}{-6} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{2+8}{-6} = -\frac{5}{3}.$$

Comme le coefficient dominant de $-3x^2 - 2x + 5$ est négatif ($a = -3$), il vient que

$$-3x^2 - 2x + 5 > 0 \iff x \in \left] -\frac{5}{3}; 1 \right[$$

On peut aussi écrire $-3x^2 - 2x + 5 = -3(x - 1)(x + \frac{5}{3}) = (x - 1)(-3x - 5)$.

Sachant que $-3x - 5 > 0 \iff -3x > 5 \iff x < -\frac{5}{3}$ on peut déduire le signe de $-3x^2 - 2x + 5$ à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$-3x + 5$	$+$	0	$-$	$-$
$-3x^2 - 2x + 5$	$-$	0	$+$	$-$

Exemples

1) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + 4x + 5 > 0$.

On a $a = 1$, $b = 4$ et $c = 5$; $\Delta = 4^2 - 4(5) = 16 - 20 = -4$. Le discriminant est strictement négatif et donc l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ n'a pas de solution réelle. L'expression $x^2 - 4x + 5$ ne change pas de signe, ici elle est positive (en zéro elle vaut 5, par exemple). L'ensemble des solution est donc $\mathbb{R}$.

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 12x + 18 > 0$.

On a $a = 2$, $b = 12$ et $c = 18$; $\Delta = 0$. Le discriminant est nul. L'expression $2x^2 + 12x + 18$ se factorise sous la forme $2x^2 + 12x + 18 = 2(x - 3)^2$; comme le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul, l'inéquation $2x^2 + 12x + 18 > 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.