
S'exercer sur les inéquations : corrigé des exercices

Exercice 1

Soit x et y deux nombres réels tels que $9 < x < 20$ et $3 < y < 5$. Parmi les affirmations suivantes quelles sont celles qui sont vraies et celles qui sont fausses ? Justifier la réponse.

- a) $12 < x + y < 25$
- b) $6 < x - y < 15$,
- c) $3 < \frac{x}{y} < 4$,
- d) $27 < xy < 100$.

La proposition a) est vraie car l'addition préserve les inégalités.
Comme $9 + 3 = 12$ et $5 + 20 = 25$, on obtient

$$12 < x + y < 25.$$

La proposition b) est fausse car la différence ne préserve pas les inégalités.

Comme $3 < y < 5$ on en déduit que $-5 < -y < -3$ et alors on peut faire la somme membre à membre des inégalités $-5 < -y < -3$ et $9 < x < 20$. On obtient

$$4 < x - y < 17.$$

Si x et y sont deux nombres réels vérifiant respectivement $9 < x < 20$ et $3 < y < 5$ alors la différence $x - y$ peut prendre aussi bien des valeurs supérieures ou égales à 15 que des valeurs inférieures ou égales à 6.

Par exemple pour $x_0 = 9,5$ et $y_0 = 4,5$ on a $x_0 - y_0 = 5 \leq 6$ et pour $x_1 = 19,5$ et $y_1 = 3,5$ on a $x_1 - y_1 = 16 \geq 15$.

La proposition c) est fausse. Car la quotient ne préserve pas les inégalités.

Si x et y sont deux nombres réels vérifiant respectivement $9 < x < 20$ et $3 < y < 5$ alors le quotient $\frac{x}{y}$ peut prendre aussi bien des valeurs supérieures ou égales à 4 que des valeurs inférieures ou égales à 3.

Par exemple pour les valeurs $x_0 = 17,5$ et $y_0 = 3,5$ on a $\frac{x_0}{y_0} = 5 \geq 4$ et pour les valeurs $x_1 = 9,2$ et

$$y_1 = 4,6 \text{ on a } \frac{x_1}{y_1} = 2 \leq 3.$$

La proposition d) est vraie car dans les inégalités $9 < x < 20$ et $3 < y < 5$ les nombres sont positifs, on peut donc effectuer le produit membre à membre.

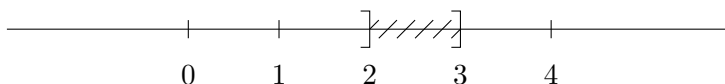
Exercice 2 Résoudre le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 3x - 7 \leq 2 \\ -2x - 1 < -5 \end{cases}$$

Pour que le nombre réel x soit solution du système, il doit vérifier simultanément les deux inéquations.
Or,

$$\begin{aligned} 3x - 7 \leq 2 &\iff 3x \leq 9 &\iff x \leq 3 \\ \text{et} \\ -2x - 1 < -5 &\iff -2x < -4 &\iff x > 2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions du système donné est l'intervalle $]2; 3]$. Il est représenté par la partie hachurée de la droite ci-dessous.



Exercice 3 Soit x et y deux nombres réels tels que $-7 < x < 5$ et $2 < y < 8$. Parmi les affirmations suivantes quelles sont celles qui sont vraies et celles qui sont fausses? Justifier la réponse.

- a) $-5 < x + y < 13$.
- b) $-9 < x - y < -3$.
- c) $-3 < y - x < 15$.
- d) $-14 < xy < 40$.

La proposition a) est vraie, car la somme préserve les inégalités et que ce résultat est obtenu en additionnant membre à membre les inégalités.

La proposition b) est fausse. Si x et y sont deux nombres réels vérifiant respectivement $-7 < x < 5$ et $2 < y < 8$ alors on a

$$2 < y < 8 \iff -2 > -y > -8 \iff -8 < -y < -2.$$

On déduit alors l'encadrement $-15 < x - y < -3$.

La différence $x - y$ peut prendre aussi bien des valeurs supérieures ou égales à -3 que des valeurs inférieures ou égales à -9 .

Par exemple pour $x_0 = -4$ et $y_0 = 7$, on a $x_0 - y_0 = -11 \leq -9$ et pour $x_1 = 4$ et $y_1 = 3$, on a $x_1 - y_1 = 1 \geq -3$.

La proposition c) est vraie.

Il faut écrire la différence comme une somme : $x - y = x + (-y)$.

L'inégalité $-7 < x < 5$ équivaut à l'inégalité $-5 < -x < 7$ que l'on additionne membre à membre à $2 < y < 8$.

La proposition d) est fausse.

Si x et y sont deux nombres réels vérifiant respectivement $-7 < x < 5$ et $2 < y < 8$ alors on a bien $xy < 40$. Cependant, le produit xy peut prendre des valeurs inférieures ou égales à -14 .

Par exemple pour $x_1 = -6$ et $y_1 = 7$, on a $x_1 y_1 = -42 \leq -14$.

En fait on remarque que

$$-7 < x < 5 \iff -7 < x < 0 \text{ ou } 0 \leq x < 5 \iff 0 < -x < 7 \text{ ou } 0 \leq x < 5.$$

Comme y est lui toujours positif, on en déduit

$$\begin{aligned} (0 < -xy < 56 \text{ ou } 0 \leq xy < 40) &\iff (-56 < xy < 0 \text{ ou } 0 \leq xy < 40) \\ &\iff -56 < xy < 40. \end{aligned}$$

Exercice 4 On considère trois nombres réels x, y et z vérifiant respectivement

$$-2x - 1 \leq 3 \qquad 3y + 2 \geq 5 \qquad \text{et} \qquad -5z + 6 \geq -4.$$

Quelles sont alors les assertions vraies? Justifier

- a) $xy \geq -2$.
- b) $z - y \leq 1$.
- c) $x + y \geq -1$.
- d) $x - y \geq -3$.

Coup de pouce : Il faut commencer par résoudre les inéquations que vérifient x, y et z .

On a

$$\begin{aligned} -2x - 1 \leq 3 &\iff -2x \leq 4 &\iff x \geq -2, \\ 3y + 2 \geq 5 &\iff 3y \geq 3 &\iff y \geq 1, \\ -5z + 6 \geq -4 &\iff -5z \geq -10 &\iff z \leq 2. \end{aligned}$$

La proposition a) est fausse car si x et y sont deux nombres réels vérifiant respectivement $x \geq -2$ et $y \geq 1$ alors le produit xy peut prendre aussi bien des valeurs supérieures ou égales à -2 que des valeurs strictement inférieures à -2 .

Par exemple pour les valeurs $x_0 = -1$ et $y_0 = 5$, on a $x_0 y_0 = -5 \leq -2$ et pour les valeurs $x_1 = 1$ et $y_1 = 2$, on a $x_1 y_1 = 2 > -2$.

La proposition b) est vraie, en additionnant, membre à membre les inégalités $z \leq 2$ et $-y \leq -1$ on obtient $z - y \leq 1$.

La proposition c) est vraie, il suffit que faire la somme des inégalités membre à membre.

La proposition d) est fausse car pour x et y tels que $x \geq -2$ et $y \geq 1$, la différence $x - y$ peut prendre aussi bien des valeurs supérieures ou égales à -3 que des valeurs strictement inférieures à -3 . Par exemple si $x_0 = -1$ et $y_0 = 5$, on a $x_0 - y_0 = -6 < -3$ et si $x_1 = 1$ et $y_1 = 2$, on a $x_1 - y_1 = -1 \geq -3$.

Exercice 5 Préciser le domaine où l'inéquation ci-dessous a un sens, la résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter graphiquement l'ensemble de ses solutions :

$$\frac{6}{x-5} < \frac{5}{x-5}.$$

Pour que cette inéquation ait un sens il faut que $x \neq 5$.

Sachant que pour $x \neq 5$, $\frac{6}{x-5} = \frac{5}{x-5} + \frac{1}{x-5}$, l'inéquation proposée équivaut à $\frac{1}{x-5} < 0$ c'est-à-dire à $x - 5 < 0$, soit $x < 5$. Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation proposée est $\mathcal{S} =]-\infty, 5[$.

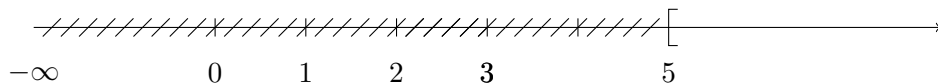
Une autre méthode consiste à distinguer les deux cas suivants :

Si $x - 5 > 0$ c'est-à-dire si $x > 5$ alors $\frac{6}{x-5} < \frac{5}{x-5} \iff 6(x-5) < 5(x-5)$. Cette dernière inéquation n'a pas de solution puisque $6 > 5$.

Si $x - 5 < 0$ c'est-à-dire si $x < 5$ alors $\frac{6}{x-5} < \frac{5}{x-5} \iff 6(-x+5) > 5(-x+5)$. Cette dernière inégalité est vraie pour toutes les valeurs de x (avec $x < 5$).

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation $\frac{6}{x-5} < \frac{5}{x-5}$ est $\mathcal{S} =]-\infty, 5[$.

Cet l'ensemble des solutions est représenté par la partie hachurée de la droite ci-dessous



Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

1. $x^2 + 4x + 1 > 0$.

On utilise la factorisation de l'expression $x^2 + 4x + 1$. On calcule le discriminant Δ du trinôme $x^2 + 4x + 1$. On trouve $\Delta = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ et les deux solutions de l'équation $x^2 + 4x + 1 = 0$ sont alors

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}.$$

On a alors $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$. On peut utiliser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$x+2-\sqrt{3}$		-	-	0	+	
$x+2+\sqrt{3}$		-	0	+	+	
x^2+4x+1		+	0	-	0	+

On en déduit que $x^2 + 4x + 1 > 0 \iff x \in]-\infty; -2 - \sqrt{3}[\cup]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$.

On peut éviter l'utilisation du tableau de signe et utiliser l'argument suivant : puisque que $\Delta > 0$ et que le coefficient dominant(celui de x^2) de $x^2 + 4x + 1$ est positif, ce trinôme est positif à l'exterieur de ses racines et négatif à l'intérieur.

2. $x^2 + 4x + 4 > 0$.

On utilise la factorisation de l'expression $x^2 + 4x + 4$ à savoir qu'on a $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Cette expression est donc toujours positive ou nulle puisqu'il s'agit du carré d'un nombre réel. Elle s'annule pour la valeur -2 et donc l'ensemble des solutions cherché est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

3. $\frac{7}{-x^2 - 9} \leq \frac{-2x + 1}{-x^2 - 9}$.

L'expression $-x^2 - 9 = -(x^2 + 9)$ est strictement négative pour toute valeur de x .

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{7}{-x^2 - 9} \leq \frac{-2x + 1}{-x^2 - 9} \iff 7 \geq -2x + 1 \iff 6 \geq -2x \iff x \geq -3$$

L'ensemble des solutions cherché est l'intervalle $[-3, +\infty[$.

4. $(4x + 7)(-5x + 3) \geq 0$.

Il s'agit ici d'étudier le signe d'un produit.

$$4x + 7 \geq 0 \iff 4x \geq -7 \iff x \geq \frac{-7}{4}. \quad -5x + 3 \geq 0 \iff -5x \geq -3 \iff x \leq \frac{3}{5}.$$

On peut utiliser le tableau de signes suivant en notant $E(x) = (4x + 7)(-5x + 3)$.

x	$-\infty$	$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$	
$-5x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	
$4x + 7$	$-$	0	$+$	$+$	
$E(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions cherché est l'intervalle $\left[\frac{-7}{4}; \frac{3}{5}\right]$.

Remarquons que l'on peut éviter le recours au tableau de signes en évoquant le résultat suivant : l'expression $(4x+7)(-5x+3)$ est un trinôme (sous forme factorisée) de discriminant positif et de coefficient dominant (celui de x^2) négatif. Il est donc négatif à l'extérieur de ses racines et positif à l'intérieur.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{7x+2}{-3x+10} < 0$.

Cette inéquation n'a de sens que si $x \neq \frac{10}{3}$.

Lorsqu'on étudie le signe d'un quotient, on applique la même technique que pour un produit en étudiant le signe du dénominateur et celui du numérateur.

$$7x+2 \geq 0 \iff 7x \geq -2 \iff x \geq \frac{-2}{7}. \quad -3x+10 \geq 0 \iff -3x \geq 10 \iff x \leq \frac{10}{3}.$$

On peut utiliser le tableau de signes suivant en notant $E(x) = \frac{7x+2}{-3x+10}$.

x	$-\infty$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$-3x+10$	$+$	$+$	0	$-$
$7x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$E(x)$	$-$	0	$+$	$-$

L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left] -\infty; \frac{-2}{7} \right[\cup \left] \frac{10}{3}; +\infty \right[$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

1. $\sqrt{5-4x} > x+4$.

Cette inéquation n'a de sens que si $5-4x \geq 0$ soit pour $x \leq \frac{5}{4}$.

On remarque aussi que si $x < -4$, alors $x+4 < 0$. Par d'ailleurs $\sqrt{5-4x} > 0$. L'inéquation proposée est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x < -4$.

Lorsqu'une inéquation comporte une racine carré on élève au carré, mais il faut être vigilant quant aux signes des expressions.

Si $x \geq -4$ et $x \leq \frac{5}{4}$, alors

$$x+4 \leq 0 \text{ et } 5-4x \geq 0 \text{ et}$$

$$(\sqrt{5-4x} > x+4) \iff (\sqrt{5-4x})^2 > (x+4)^2 \iff (5-4x > (x+4)^2).$$

Comme

$$5-4x > (x+4)^2 \iff 5-4x > x^2+8x+16 \iff x^2+12x+11 < 0.$$

Le trinôme $x^2+12x+11$ a pour discriminant $\Delta = 100 = 10^2$. Ses racines sont -11 et -1 .

Comme le coefficient dominant de $x^2 + 12x + 11$ est positif, $x^2 + 12x + 11$ est négatif pour $x \in]-11; -1[$. Ainsi sur l'intervalle $[-4, \frac{5}{4}]$, l'inéquation n'est vérifiée que si $x \in]-4; -1[$.

Donc pour $x \in]-4; -1[$, $x^2 + 12x - 11 < 0$ et on sait déjà que pour $x < -4$, l'inéquation proposée est vérifiée.

On en déduit que l'ensemble des solutions cherché est l'intervalle $x \in]-\infty; -1[$.

2. $\sqrt{5x^2 - 3x + 5} > 5 - x$.

Cette inéquation n'a de sens que si $5x^2 - 3x + 5 \geq 0$. Le discriminant du trinôme $5x^2 - 3x + 5$ est négatif $((-3)^2 - 4 \times 5 \times 5 < 0)$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5x^2 - 3x + 5 \geq 0$.

On remarque aussi que si $x > 5$, alors $5 - x < 0$. L'inéquation proposée est vérifiée quelles que soient les valeurs réelles prises par x pour $x > 5$.

Pour $x \leq 5$, on a

$$\sqrt{5x^2 - 3x + 5} > 5 - x \iff (5x^2 - 3x + 5 > (5 - x)^2) \iff 4x^2 + 7x - 20 > 0.$$

Réolvons $4x^2 + 7x - 20 = 0$ sur l'intervalle $] -\infty; 5]$.

Après calcul du discriminant $\Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-20) = (3\sqrt{41})^2$ on trouve les deux racines réelles $\frac{-7 + 3\sqrt{41}}{8}$ et $\frac{-7 - 3\sqrt{41}}{8}$ du trinôme $4x^2 + 7x - 20$ toutes deux inférieures à 5.

$$\text{Donc } 4x^2 + 7x - 20 > 0 \text{ pour } x \in \left] -\infty; \frac{-7 - 3\sqrt{41}}{8} \right[\cup \left[\frac{-7 + 3\sqrt{41}}{8}; +\infty \right[.$$
