

Calculer avec la valeur absolue

Définition 1 Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x est le nombre positif noté $|x|$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples $|67| = 67$, $|-9| = 9$.

Proposition 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|-x| = |x|,$$

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

$$|x| = 0 \iff x = 0.$$

Exemple

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue x , $|x - 9| = 0$. On a $x - 9 = 0$ et donc $x = 9$.

Proposition 2 a étant un nombre réel strictement positif et x un nombre réel quelconque. On a

$$|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a,$$

$$|x| < a \iff -a < x < a \text{ ou encore } x \in]-a; a[,$$

$$|x| > a \iff x < -a \text{ ou } x > a \text{ ou encore } x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[.$$

Exemples

1) Soit à résoudre l'équation d'inconnue x , $|x - 9| = 8$. On a $x - 9 = 8$ ou $x - 9 = -8$ et donc deux solutions $x = 17$ ou $x = 1$.

2) Si on cherche à résoudre l'inéquation d'inconnue x , $|x + 9| < 3$, on écrit

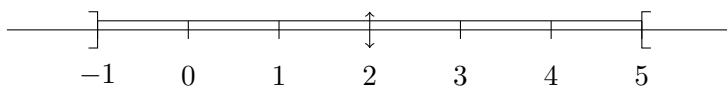
$$|x + 9| < 3 \iff -3 < x + 9 < 3 \iff -12 < x < -6.$$

3) Si on cherche à résoudre l'inéquation d'inconnue x , $|x + 9| > 2$, on écrit

$$|x + 9| > 2 \iff (x + 9 > 2 \text{ ou } x + 9 < -2) \iff (x > -7 \text{ ou } x < -11).$$

4) Si on cherche à résoudre l'inéquation d'inconnue x , $|x - 2| < 3$, on écrit

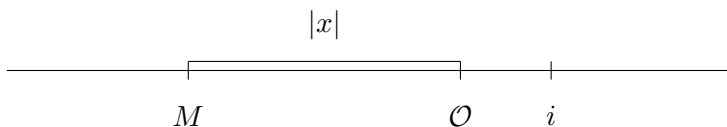
$$|x - 2| < 3 \iff -3 < x - 2 < 3 \iff -1 < x < 5.$$



De manière plus générale, si a est un nombre réel et h un nombre réel positif, les nombres réels x tels que $|x - a| < h$ sont exactement les nombres appartenant à l'intervalle $]a - h, a + h[$.

On a aussi la définition suivante :

Définition 2 Soit x un nombre réel. Sur la droite réelle on note M le point d'abscisse x ou $-x$. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie comme étant la distance de M à O c'est-à-dire $|x| = OM$.



Proposition 3 Soit a et b deux nombres réels et soit sur la droite réelle, A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b . On a $|a - b| = AB$, autrement dit le nombre $|a - b|$ mesure la distance entre les points A et B .

Proposition 4 Soit x et y deux nombres réels. On a

$$|xy| = |x| |y|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

Définition 3 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que x est une approximation de a à ε près lorsque $|x - a| < \varepsilon$.

Par exemple 1,41 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.