
S'exercer sur le calcul avec des valeurs absolues : corrigé des exercices

Exercice 1

Donner la valeur exacte des nombres

$$A = |2 - \sqrt{3}|; B = |-2 - \pi|; C = \left| \frac{1}{3} - 2 \right| + \left| 4 - \frac{2}{3} \right|$$

Pour A : comme $\sqrt{3} < 2$ on a $2 - \sqrt{3} > 0$ et donc $A = 2 - \sqrt{3}$.

Pour B : on a $-2 - \pi < 0$ donc $B = |-2 - \pi| = -(-2 - \pi) = 2 + \pi$.

Pour C : $C = \left| \frac{1}{3} - 2 \right| + \left| 4 - \frac{2}{3} \right| = 2 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{2}{3}$ car $\frac{1}{3} < 2$ et $\frac{2}{3} < 4$ et donc $C = 6 - \frac{3}{3} = 5$.

Exercice 2

1- Calculer $|x - 1|$ pour $x = 2, x = -1$.

Si $x = 2$ alors $|x - 1| = |2 - 1| = |1| = 1$.

Si $x = -1$ alors $|x - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2$.

2- Déterminer les valeurs réelles de x telles que $|x - 1| = x - 1$.

On a $|x - 1| = x - 1$ si et seulement si $x - 1 \geq 0$. Donc les valeurs réelles cherchées sont tous les nombres de l'intervalle $[1, +\infty[$.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x| = x - 1$.

Si $x > 0$, $|x| = x$ et l'équation s'écrit $x = x - 1$ ce qui est impossible. Donc l'équation $|x| = x - 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^+$.

Si $x < 0$ $|x| = -x$ et l'équation s'écrit $-x = x - 1$, ou encore $2x = 1$, soit $x = \frac{1}{2}$. Or, $\frac{1}{2} > 0$; donc, $|x| = x - 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^-$.

Finalement, l'équation proposée n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels.

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations a) $|x| < 2$ b) $|x| > 5$.

a) $|x| < 2 \iff -2 < x < 2$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -2 ; 2[$.

b) $|x| > 5 \iff (x < -5 \text{ ou } x > 5)$. L'ensemble des solutions est l'union d'intervalles $] -\infty ; -5[\cup] 5 ; +\infty [$.

Exercice 3

Soient x, y des nombres réels. Écrire sans valeur absolue les expressions suivantes.

1) $A = |x - y|$;

2) $B = |2x - 1| + |x - 3| = 0$;

3) $C = |-4x + 3| - |8x - 1|$;

4) $D = |(x - 2)(x + 3)|$.

1) On écrit si $x \geq y$ alors, $A = x - y$ et si $x < y$ alors $A = -x + y$.

2) Si $2x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq \frac{1}{2}$, alors $|2x - 1| = 2x - 1$ et si $x \geq 3$, alors $|x - 3| = x - 3$. On en déduit que :

— Si $x \in [3 ; +\infty[$ alors, $|2x - 1| + |x - 3| = 0$ devient $2x - 1 + x - 3 = 0$, soit $3x - 4 = 0$.

— Si $x \in [\frac{1}{2} ; 3[$ alors, $|2x - 1| + |x - 3| = 0$ devient $2x - 1 - x + 3 = 0$, soit $x + 2 = 0$.

— Si $x \in] -\infty ; \frac{1}{2}[$ alors, $|2x - 1| + |x - 3| = 0$ devient $-2x + 1 - x + 3 = 0$, soit $-3x + 4 = 0$.

On peut utiliser le tableau suivant

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	0	$2x - 1$	$2x - 1$
$ x - 3 $	$-x + 3$	0	$x - 3$	$x - 3$
$ 2x - 1 + x - 3 $	$-3x + 4$	$\frac{5}{2}$	$x + 2$	$3x - 4$

3) Si $-4x + 3 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \leq \frac{3}{4}$, alors $|-4x + 3| = -4x + 3$ et si $x \geq \frac{1}{8}$, alors $|8x - 1| = 8x - 1$. On en déduit que :

— Si $x \in [\frac{3}{4} ; +\infty[$, alors $x > \frac{1}{8}$ et $B = |-4x + 3| - |8x - 1|$ devient $B = -4x + 3 - (8x - 1)$, soit $B = -12x + 4$.

— Si $x \in [\frac{1}{8} ; \frac{3}{4}[$, alors $B = |-4x + 3| - |8x - 1|$ devient $B = -4x + 3 - (8x - 1)$, soit $B = -12x + 4$.

— Si $x \in] -\infty ; \frac{1}{8}[$, alors $B = |-4x + 3| - |8x - 1|$ devient $B = -4x + 3 - (-8x + 1)$, soit $B = 4x + 2$.

On peut utiliser le tableau suivant

x	$-\infty$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	
$ -4x+3 $	$-4x+3$	$-4x+3$	0	$4x-3$	
$ 8x-1 $	$-8x+1$	0	$8x-1$	$8x-1$	
$B = -4x+3 - 8x-1 $	$4x+2$	$\frac{5}{2}$	$-12x+4$	5	$-4x-2$

4) On a les cas suivants

Si $x < -3$ alors $x + 3 < 0$ et $x - 2 < 0$ et donc $D = -(x + 3)(-(x - 2)) = (x + 3)(x - 2)$.

Si $x \in]-3; 2[$ alors $D = -(x - 2)(x + 3)$.

Si $x > 2$ alors $D = (x - 2)(x + 3)$.

On peut regrouper deux cas avec : si $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$ alors, $D = -(x - 2)(x + 3)$.

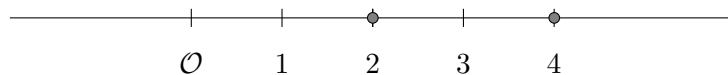
Exercice 4

Représenter sur la droite réelle les ensembles E et F ci-dessous et écrire sous forme d'intervalle l'ensemble G .

$$1-E = \{x \in \mathbb{R} ; |x - 3| = 1\}.$$

On a : $|x - 3| = 1$ si et seulement si $x - 3 = 1$ ou $x - 3 = -1$.

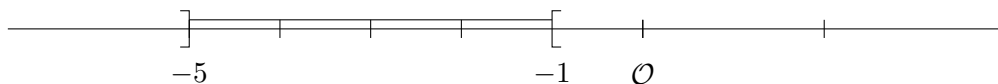
$$\text{Donc } E = \{4, 2\}.$$



$$2-F = \{x \in \mathbb{R} ; |x + 3| < 2\}.$$

On a $|x + 3| < 2 \iff -2 < x + 3 < 2 \iff -5 < x < -1$.

$$\text{Donc } F =]-5; -1[$$



$$3-G = \{x \in \mathbb{R} ; |x^2 - 1| \leq 2\}.$$

D'après le cours $|x^2 - 1| \leq 2 \iff -2 \leq x^2 - 1 \leq 2 \iff -1 \leq x^2 \leq 3$. De plus l'inéquation $x^2 > -1$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 \leq 3 \iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.
Donc $G = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes :

a) $|x - 2| = 4$.

Soit $x - 2 = 4$, soit $x - 2 = -4$. On trouve donc deux solutions 6 et -2 .

b) $|x - 2| + |x + 4| = 8$.

b) Considérons les trois situations :

1. Si $x < -4$, alors $|x - 2| = -x + 2$ et $|x + 4| = -x - 4$.

L'équation s'écrit $-x + 2 - x - 4 = 8$, ou encore $-2x - 2 = 8$; soit $-2x = 10$ et donc, $x = -5$.
Comme $-5 < -4$, -5 est bien une solution de l'équation proposée.

2. Si $x > -4$ et $x < 2$, alors $|x - 2| = -x + 2$ et $|x + 4| = x + 4$.

L'équation s'écrit $-x + 2 + x + 4 = 8$ ou encore $6 = 8$; ce qui est faux. L'équation n'a pas de solution sur l'intervalle $] -4; 2[$.

3. Si $x > 2$ alors, $|x - 2| = x - 2$ et $|x + 4| = x + 4$.

L'équation s'écrit $x - 2 + x + 4 = 8$ ou encore $2x + 2 = 8$ soit $2x = 6$ et donc $x = 3$. On a bien $3 > 2$ et donc 3 est une solution.

En conclusion : les solutions de l'équation proposée sont donc 3 et -5 .

2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de m l'existence des solutions de l'équation d'inconnue t , (E) suivante.

$$|(m - 1)t + m| = 2.$$

Si $m = 1$ alors l'équation aboutit à l'impossibilité $|1| = 2$. Par conséquent, pour $m = 1$, l'équation n'admet pas de solutions.

Si $m \neq 1$ on a $(m - 1)t + m = \pm 2$. On en déduit deux valeurs possibles de t :

$$t = \frac{2 - m}{m - 1} \text{ et } t = \frac{-2 - m}{m - 1}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\left\{ \frac{2 - m}{m - 1}; \frac{-2 - m}{m - 1} \right\}$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x suivantes :

1) $|x - 2| < 4$.

Des deux équivalences $|x - 2| < 4 \iff -4 < x - 2 < 4 \iff -2 < x < 6$, on déduit l'ensemble des solutions égal à l'intervalle $] - 2 ; 6[$.

2) $|x - 2| < |x + 4|$

De l'équivalence $|x - 2| < |x + 4| \iff -|x + 4| < x - 2 < |x + 4|$, il s'ensuit deux cas

1) Si $x > -4$, alors $|x + 4| = x + 4$ et la double inéquation devient $-x - 4 < x - 2 < x + 4$.

D'une part $-x - 4 < x - 2 \iff -2x < +2$ ce qui est équivalent à $x > -1$

D'autre part l'inéquation $x - 2 < x + 4$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les solutions inférieures ou égales à -4 , sont tous les nombres réels strictement supérieurs à -1 , soit $x \in] - 1, +\infty[$.

2) Si $x \leq -4$, alors $|x + 4| = -x - 4$ et l'inéquation $|x - 2| < |x + 4|$ devient $x + 4 < x - 2 < -x - 4$.

La première inéquation est impossible et la seconde n'est vérifiée que pour $2x < -2$, ou encore $x < -1$ compatible avec la condition $x \leq -4$. Mais comme il s'agit d'avoir les 2 conditions à la fois, l'ensemble des valeurs x convenable est vide.

L'ensemble des solutions de $|x - 2| < |x + 4|$ est donc l'intervalle $] - 1 ; \infty[$

3) $4 < |x - 3| < 6$.

L'inéquation $4 < |x - 3|$ est équivalente à $x - 3 < -4$ ou $x - 3 > 4$ ou encore à $x < -1$ ou $x > 7$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $4 < |x - 3|$ est l'ensemble $S_1 =] - \infty ; -1[\cup] 7 ; +\infty[$.

L'inéquation $|x - 3| < 6$ est équivalente à $-6 < x - 3 < 6$ ou encore à $-3 < x < 9$. L'ensemble des

solutions de l'inéquation $|x - 3| < 6$ est l'ensemble $S_2 =] - 3 ; 9[$.

Pour que les deux inéquations soient vérifiées simultanément par un nombre réel x , il faut et il suffit qu'il appartienne à S_1 et à S_2 , c'est-à-dire, à l'intersection $S_1 \cap S_2 =] - 3 ; -1[\cup] 7 ; 9[$.

