

Fonctions numériques d'une variable réelle

1 Notion de fonction

On se limite ici, comme l'indique le titre général aux fonctions numériques d'une variable réelle.

1.1 Définition

Une *fonction* est un procédé qui, à chaque élément d'un certain ensemble de nombres, associe un nombre déterminé.

Exemples de fonctions

- On se donne un carré, dont la longueur d'un côté est notée c . On appelle fonction « périmètre » la fonction qui associe au nombre c le nombre $4c$, mesure du périmètre du carré.
- On se donne un carré, dont la longueur d'un côté est notée c . On appelle fonction « aire » la fonction qui associe au nombre c le nombre c^2 , mesure de l'aire du carré.
- La *fonction de Dirichlet* associe la valeur 1 à un nombre rationnel, et la valeur 0 à un nombre réel irrationnel.
- Quand on associe à chaque nombre réel x la valeur $x^2 - 5x + 1$, on définit une fonction.
- Une autre fonction est celle qui, à un nombre réel x non nul, associe son inverse $\frac{1}{x}$.

Notations

La *notation fonctionnelle* consiste à symboliser une fonction par une lettre, telle que $f, g, h, \dots$, éventuellement munie d'un indice comme pour $f_1, f_2, \dots$

Exemples de notations fonctionnelles

- La fonction périmètre d'un carré est la fonction p telle que $p(c) = 4c$.
- La fonction aire d'un carré est la fonction A telle que $A(c) = c^2$.
- La *fonction de Dirichlet* est la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- L'écriture $f(x) = x^2 - 5x + 1$ définit la fonction f comme étant celle qui associe à un quelconque nombre t la valeur $t^2 - 5t + 1$. Par exemple $f(0) = 1$.
- L'écriture $h(x) = \frac{1}{x}$ définit la fonction h comme étant celle qui associe son inverse à un quelconque nombre réel non nul.

- L'écriture $v(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ définit la fonction v comme étant celle qui associe sa

valeur absolue à un quelconque nombre réel non nul. La valeur absolue de x correspond à la « distance » à zéro du nombre réel x sur la droite réelle.

On note $f(x)$ le nombre que la fonction f associe au nombre x . On dit que $f(x)$ est l'*image* de x par la fonction f , ou encore que $f(x)$ est la *valeur* de f en x . Lorsque $y = f(x)$, on dit aussi que x est un *antécédent* de y par f .

Exemples d'images et d'antécédents

- Pour la fonction périmètre d'un carré p telle que $p(c) = 4c$, l'image de c est $4c$.

L'image de 8 vaut 32, par exemple. L'antécédent de 32 est 8.

Pour déterminer les antécédents c d'un nombre a , on résout l'équation $4c = a$. Si on cherche les antécédents de 12 on résout $4c = 12$, et donc $c = 3$. Le nombre 3 est l'antécédent du nombre 12.

- Pour la fonction aire d'un carré A telle que $A(c) = c^2$, l'image de 7 est 49. On a $(7)^2 = (-7)^2 = 49$, mais $c \geq 0$ et donc -7 ne convient comme antécédent de 49.

1.2 Domaine de définition

Supposons qu'une fonction f soit donnée par une expression de l'image $f(x)$ d'un quelconque nombre x . On appelle *domaine de définition* de la fonction f l'ensemble des nombres réels x tels que l'expression $f(x)$ soit un nombre réel.

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction f , on aura à appliquer des règles telles que les suivantes.

- Le quotient a/b de deux nombres réels est défini si $b \neq 0$.
- La racine carrée $\sqrt{a}$ d'un nombre réel a est définie si $a \geq 0$.
- Le logarithme $\ln(a)$ d'un nombre réel a est défini si $a > 0$.

Exemples de domaines de définition

- La fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)}$$

a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- La fonction g telle que

$$g(x) = \sqrt{x(x + 1)}$$

a pour domaine de définition $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.

- La fonction h telle que

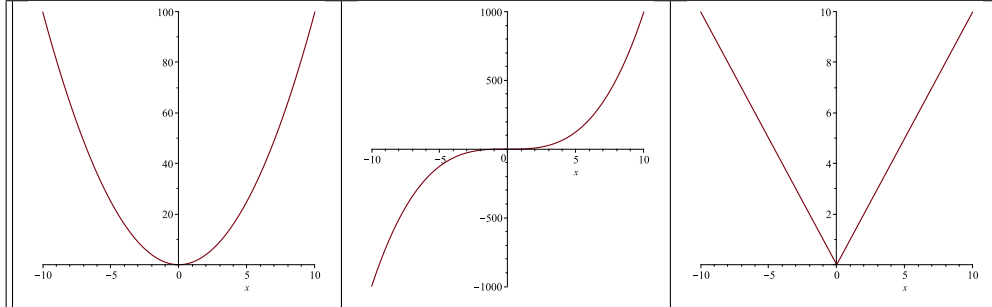
$$h(x) = \ln(x(x + 1))$$

a pour domaine de définition $] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

La *courbe représentative* (ou représentation graphique) d'une fonction f définie sur D est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) telles que $x \in D$ et $y = f(x)$.

Exemples de représentation graphique

FIGURE 1 – Trois fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto |x|$



2 Variations des fonctions

Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans le domaine de définition de f .

1. On dit que la fonction f est *croissante sur I* lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I , on a l'implication

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) .$$

2. On dit que la fonction f est *décroissante sur I* lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I , on a l'implication

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) .$$

3. On dit que la fonction f est *monotone sur I* lorsqu'elle est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

4. On dit que la fonction f est *strictement croissante sur I* lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I , on a l'implication

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) .$$

5. On dit que la fonction f est *strictement décroissante sur I* lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I , on a l'implication

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) .$$

6. On dit que la fonction f est *strictement monotone sur I* lorsqu'elle est soit strictement croissante sur I , soit strictement décroissante sur I .

7. On dit que la fonction f est *constante sur I* lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I , on a l'égalité

$$f(x) = f(y) .$$

Exemples

- La fonction puissance f_2 telle que $f_2(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty, 0]$. En effet on a, pour x et y deux nombre réels,

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

et si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x + y > 0$ et si $x < 0$ et $y < 0$ alors $x + y < 0$.

On en déduit que $x^2 - y^2$ est du signe de $x - y$ sur $\mathbb{R}^+$ et du signe de $y - x$ sur $\mathbb{R}^-$.

- La fonction puissance f_3 telle que $f_3(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet on a

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Les expressions $x^3 - y^3$ et $x - y$ sont de même signe car $x^2 + y^2 + xy > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En effet $x^2 + y^2 + xy = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$, qui est la somme de deux nombres réels positifs.

- Une fonction constante sur un intervalle I est à la fois croissante et décroissante sur I . Réciproquement, une fonction qui est à la fois croissante et décroissante sur I est constante sur I .

3 Fonctions périodiques

Étant donné une fonction f de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$, et un nombre réel non nul T , on dit que T est une *période* de f lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

- Pour tout $x \in D$, le nombre réel $x + T$ est aussi élément de D .
- Pour tout $x \in D$, on a $f(x + T) = f(x)$.

On dit qu'une fonction f est *périodique* lorsqu'il existe un nombre réel non nul T qui est période de f .

Exemples de fonctions périodiques

- Le nombre 2π est période des fonctions cosinus et sinus.
- Une fonction constante de domaine de définition $\mathbb{R}$ admet n'importe quel nombre réel non nul comme période : elle est donc périodique.
- La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x$.
- La fonction *partie fractionnaire* f_r est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe la différence $f_r(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
pour tout nombre réel x , on a l'identité $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ et donc $f_r(x + 1) = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor$. La fonction partie fractionnaire est donc périodique de période 1.

Propriétés des périodes

Si T et T' sont deux périodes de la même fonction f , et si $T + T' \neq 0$, alors leur somme $T + T'$ est encore une période de f . En particulier si T est une période d'une fonction f , alors $2T, 3T, 4T, \dots, nT$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont aussi des périodes de f .

Si T est une période d'une fonction f dont le domaine de définition D est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire tel que $x \in D$ entraîne $-x \in D$), alors $-T$ est aussi une période de la fonction f .

4 Parité des fonctions

Étant donné une fonction f de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction *paire* lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

- Pour tout $x \in D$, le nombre réel $-x$ est aussi élément de D .

- Pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$.

On dit que f est une fonction *impaire* lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

- Pour tout $x \in D$, le nombre réel $-x$ est aussi élément de D .

- Pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemples de parité des fonctions

• Soit k un entier relatif. La fonction puissance f_k donnée sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k$ est paire si l'entier k est pair, impaire si au contraire l'entier k est impair. Cet exemple explique ces termes de fonctions paires et impaires.

• Une fonction constante de domaine de définition $\mathbb{R}$ est paire.

• La fonction cosinus est paire, et la fonction sinus est impaire.

5 Opérations sur les fonctions

Étant donné deux fonctions f et g ayant même domaine de définition D , on peut définir :

- leur *somme* $f + g$ est la fonction définie sur D en posant

$$\forall x \in D, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) ;$$

- leur *différence* $f - g$ est la fonction définie sur D en posant

$$\forall x \in D, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) ;$$

- leur *produit* fg , aussi noté $f \cdot g$ ou $f \times g$, est la fonction définie sur D en posant

$$\forall x \in D, \quad (fg)(x) = f(x)g(x) .$$

Si on a de plus la condition $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, on peut définir :

- leur *quotient* f/g , aussi noté $\frac{f}{g}$, est la fonction définie sur D en posant

$$\forall x \in D, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Par ailleurs, soit deux fonctions f et g de domaines de définition respectifs D et E , et telles que $f(x)$ est élément de E pour tout $x \in D$. On peut alors définir la fonction *composée de f suivie par g* , notée $g \circ f$, en posant

$$\forall x \in D, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) .$$

Le domaine de définition de la fonction $g \circ f$ est le même que le domaine de définition D de f .

Remarque

Attention à la notation : dans l'écriture $g \circ f$ de la fonction composée de f suivie par g , malgré son nom, la lettre g vient *avant* la lettre f . Ceci se justifie par le fait que l'image de x est $g(f(x))$, où g s'écrit avant f . On peut donc considérer cette apparente incohérence comme une conséquence incontournable de la convention de la notation fonctionnelle.

Exemple

Soit $g(x) = \sqrt{x}$, de sorte que le domaine de définition de la fonction g est $E = [0, +\infty[$. On pose $f(x) = x^2$, de domaine de définition $D = \mathbb{R}$. Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition que $x \in D$ entraîne que $f(x) \in E$ est réalisée, on peut considérer la fonction $g \circ f$. C'est la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$