

Les fonctions affines et linéaires

1 Introduction, définitions

De toutes les fonctions numériques, les fonctions affines sont les plus simples. Leur utilisation permet aussi bien de décrire des lois courantes de dépendance que d'approximer des situations complexes.

Définition 1.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

- Si $b = 0$, la fonction f est dite linéaire;
- Si $a = 0$, la fonction f est constante.

Exemples

1. Les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x - 1, \quad g(x) = -3x, \quad h(x) = 2019$$

sont affines. La deuxième est linéaire et la troisième est constante.

2. Aucune des fonctions suivantes n'est affine.

$$u(x) = |x|, \quad v(x) = \sin(x), \quad w(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0, \\ 3x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x et $\sin(x)$ le sinus de x .

Remarques

- 1) La seule fonction qui soit à la fois constante et linéaire est la fonction nulle $x \mapsto 0$. Elle correspond à $a = b = 0$.
- 2) À l'exception des fonctions constantes non nulles, toutes les fonctions affines admettent 0 pour image. En effet, dans le cas où $a \neq 0$, pour cela on résout l'équation $ax + b = 0$ qui a pour solution $x = \frac{-b}{a}$.
- 3) Parmi les fonctions affines, les fonctions linéaires expriment des situations de proportionnalité entre des listes d'antécédents et d'images.
- 4) Si $y = ax + b$ alors, pour $x \neq 0$, $\frac{y-b}{x} = a$ est une constante.

Rappelons qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, est

— croissante (resp. strictement croissante) sur I si

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I \text{ avec } x_1 \neq x_2, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \left(\text{resp. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \right)$$

— décroissante (resp. strictement décroissante) si

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I \text{ avec } x_1 \neq x_2, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \quad \left(\text{resp. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \right).$$

Exemple

Les fonctions affines f et g données par

$$f(x) = -x \text{ et } g(x) = -x + 5$$

sont toutes les deux décroissantes.

Tandis que les fonctions affines h et k données par

$$h(x) = x - 2019 \text{ et } k(x) = x + 1$$

sont toutes les deux croissantes.

Proposition 1.1 Soit a et b deux nombres réels et soit f la fonction affine donnée par $f(x) = ax + b$.

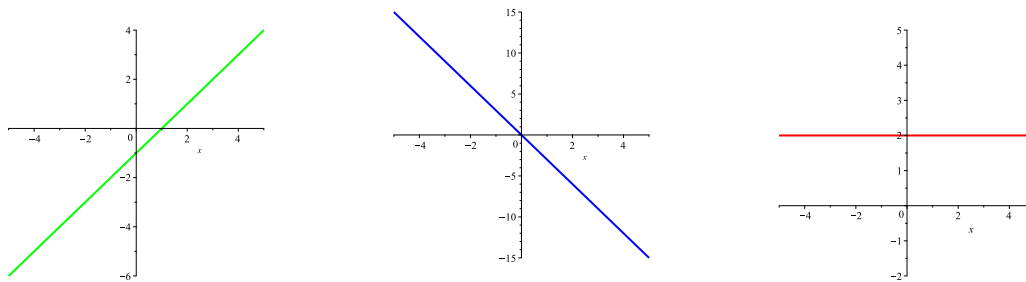
La fonction f est croissante strictement si, et seulement si, $a > 0$.

Elle est décroissante strictement si, et seulement si, $a < 0$.

Remarque Nous retrouvons ici le fait que la monotonie d'une fonction dérivable est conditionnée par le signe de sa dérivée : la dérivée d'une fonction affine f donnée par $f(x) = ax + b$ et la fonction constante donnée par $f'(x) = a$.

2 Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation dans le plan muni d'un repère d'une fonction affine est une droite. Elle est horizontale si elle est constante et passe par l'origine du repère si elle linéaire.



Proposition 2.1 (et définition) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy , toute droite non verticale est la représentation graphique d'une fonction affine :

$$x \mapsto ax + b.$$

L'équation $y = ax + b$ est une équation cartésienne de cette droite. Le nombre a est appelé coefficient directeur ou pente de la droite et b , son ordonnée à l'origine.

Remarque

L'équation générale d'une droite dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où le vecteur (α, β) est non nul.

Nous remarquons que si $\beta \neq 0$, cette équation se ramène à la forme

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} = ax + b. \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

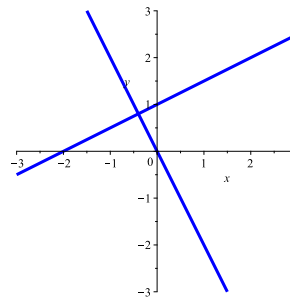
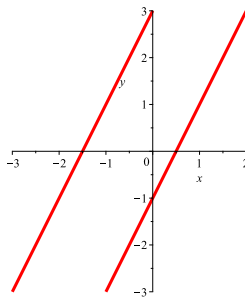
Si $\beta = 0$, l'équation s'écrit $x = c$, où c est un nombre réel. Il s'agit alors d'une droite verticale.

Proposition 2.2 Soit a, b, a' et b' quatre nombres réels.

Les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si, et seulement si, $a = a'$.

Les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' = -1$

Les deux situations sont respectivement représentées dans les figures suivantes.



3 Signe d'une fonction affine, inéquations

Soit $x \mapsto f(x) = ax + b$ une fonction affine non constante, c'est-à-dire vérifiant la condition $a \neq 0$. Souvent se pose la question de savoir pour quels nombres x , l'image $f(x)$ est positive, nulle ou négative. Partant par exemple de l'inéquation $ax + b > 0$, on en déduit que $ax > -b$. Puis selon le signe de a que

1) soit $x > -\frac{b}{a}$, si $a > 0$,

2) soit $x < -\frac{b}{a}$, si $a < 0$.

On procède de la même manière pour le cas de l'inéquation $ax + b < 0$. D'où les tableaux qui synthétisent les différentes situations.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	-	0	+

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	+	0	-

Remarques

1. Dans les inéquations ci-dessus, on peut remplacer les symboles d'inégalités strictes $<$ et $>$ par les symboles d'inégalités larges $\leq$ et $\geq$.
2. On rappelle que résoudre une équation ou une inéquation suppose toujours la donnée de l'ensemble dans lequel on la résout. Par exemple, l'inéquation $2x - 1 \geq 0$ admet l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}$.