

Rudiments de trigonométrie, fonctions trigonométriques

1 Rudiments de trigonométrie

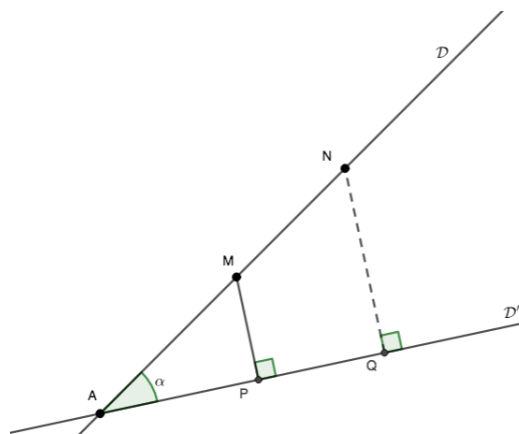
1.1 Rapports trigonométriques d'un angle aigu

Si, sur la figure ci-contre, le point M parcourt (se déplace sur) la droite $\mathcal{D}$ les rapports

$$\frac{AP}{AM}, \quad \frac{MP}{AM}, \quad \frac{MP}{AP}$$

ne changent pas (en vertu du théorème de Thalès).
Ce sont ces rapports qui définissent respectivement le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\alpha = \widehat{MAP}$.
On a donc

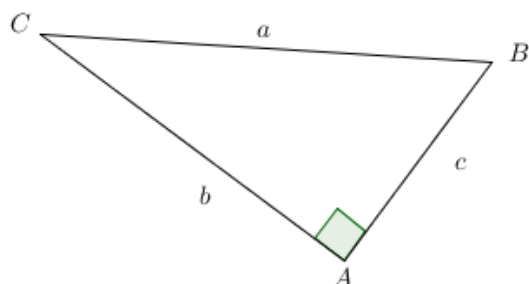
$$\cos \alpha = \frac{AP}{AM}, \quad \sin \alpha = \frac{MP}{AM}, \quad \tan \alpha = \frac{MP}{AP}.$$



Remarque. Les quantités $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont comprises entre 0 et 1 et on a : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

1.2 Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A . Les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$ sont désignés par respectivement $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$. Les longueurs des côtés $[AB]$, $[BC]$ (l'hypoténuse) et $[CA]$ sont notées respectivement c , a et b . On a les relations suivantes :



$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a}, \quad \sin \widehat{B} = \frac{b}{a}, \quad \tan \widehat{B} = \frac{b}{c}.$$

De plus,

$$\cos \widehat{C} = \sin \widehat{B} \quad \text{et} \quad \sin \widehat{C} = \cos \widehat{B}.$$

Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires (la somme des mesures en degré est égale à 90°) et ils *échangent* les valeurs de leur sinus et leur cosinus.

En utilisant les propriétés des triangles rectangles, on établit les égalités suivantes :

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit les égalités :

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ainsi que les égalités relatives à la tangente :

$$\tan 45^\circ = 1, \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

1.3 Rapports trigonométriques dans un cercle

1.3.1 Cercle trigonométrique

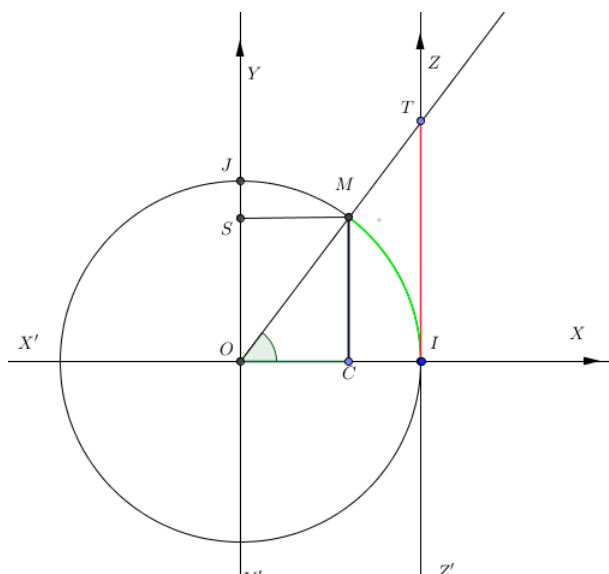


FIGURE 1 – Cercle trigonométrique

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on appelle cercle trigonométrique, le cercle centré en O , de rayon 1 (longueur commune de $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$) et orienté dans le sens contraire du déplacement des aiguilles d'une montre (voir FIGURE ??).

La longueur de la circonférence du cercle est égale à 2π (radians). Le point I étant l'origine du cercle, tout nombre réel t est alors représenté par un arc orienté $\widehat{IM}$ sur le cercle. Inversement, à tout arc orienté d'origine I on peut associer un nombre réel (sa mesure en radian).

Par exemple, 0 et 2π sont représentés par $\widehat{II}$. Le nombre $\frac{\pi}{2}$ est représenté par l'arc orienté $\widehat{IJ}$

(sens de I vers J). Le nombre $\frac{5\pi}{2}$ est représenté par l'arc orienté obtenu en ajoutant (concaténant) dans le sens trigonométrique à $\widehat{IJ}$ un tour complet du cercle.
Si on note J' le point symétrique de J par rapport à O , le nombre $-\frac{\pi}{2}$ est représenté par $\widehat{IJ'}$ (le sens du parcours étant le sens du déplacement des aiguilles d'une montre).

Remarque

Si, pour un point M du cercle, tout arc $\widehat{IM}$ représente un et un seul nombre réel, le point M (extrémité finale de l'arc) représente une infinité de réels. En effet, si la mesure de l'arc $\widehat{IM}$ est α alors M représente les nombres $\alpha + 2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

Définition

Soit M un point sur le cercle. On appelle **mesure principale** de l'arc orienté $\widehat{IM}$ (ou de de l'angle orienté $\widehat{AOM}$) l'unique mesure de $\widehat{IM}$ comprise dans l'intervalle $] -\pi, +\pi]$.

1.3.2 Cosinus, sinus et tangente

On désigne par $(X'X)$ et $(Y'Y)$ les axes portés par respectivement par les droites (OI) et (OJ) . L'origine des axes est O et le sens le sens des vecteurs du repère. L'axe $(Z'Z)$ est porté par la tangente au point I au cercle trigonométrique. Le sens est celui de $\vec{OJ}$.

Définitions - Notations

Soit M un point sur le cercle. On désigne par α la mesure commune de l'arc $\widehat{IM}$ et de l'angle $\widehat{IOM}$ (voir FIGURE ??).

Le sinus, noté $\sin \alpha$, de $\widehat{IM}$ ou $\widehat{IOM}$ est alors la mesure algébrique du segment $[OS]$.

Le cosinus, noté $\cos \alpha$, de $\widehat{IM}$ ou $\widehat{IOM}$ est la mesure algébrique du segment $[OC]$.

La tangente, notée $\tan \alpha$, de $\widehat{IM}$ ou $\widehat{IOM}$ est la mesure algébrique du segment $[IT]$.

On a par exemple, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La figure ?? ci-dessous indique le cosinus et le sinus de quelques angles remarquables.

Remarque

Comme la mesure algébrique du segment $[OI]$ est égale à 1 (c'est aussi la mesure du rayon du cercle trigonométrique), grâce au théorème de Pythagore, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

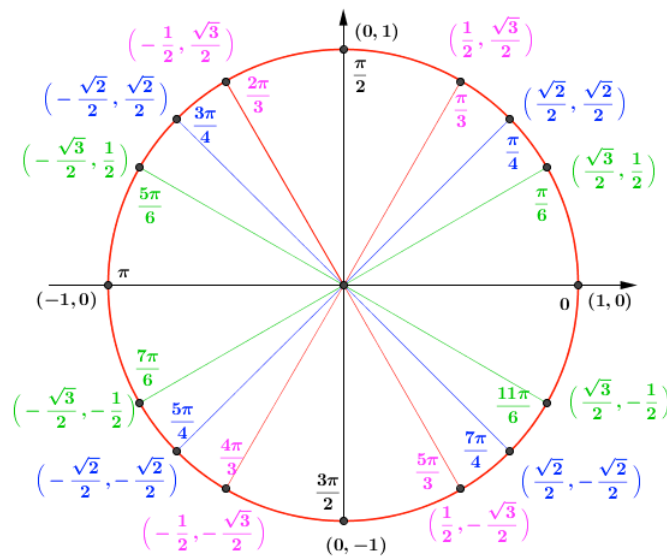


FIGURE 2 – Angles remarquables

1.4 Fonctions sinus et cosinus

La fonction qui à tout nombre réel x , représenté par l'arc orienté $\widehat{IM}$ de mesure x radians, associe le sinus de l'arc $\widehat{IM}$ est appelée la fonction sinus. Elle est notée $\sin$.

On définit de manière analogue la fonction cosinus, notée $\cos$. Voici quelques propriétés de ces deux fonctions.

- Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π -périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

- Les fonctions sinus et cosinus sont bornées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin x \leq +1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq +1.$$

- La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

- Elles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

- Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

On a représenté dans la figure 3, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, les courbes

représentatives des fonctions sinus et cosinus que les droites d'équation $y = 1$ et $y = -1$.

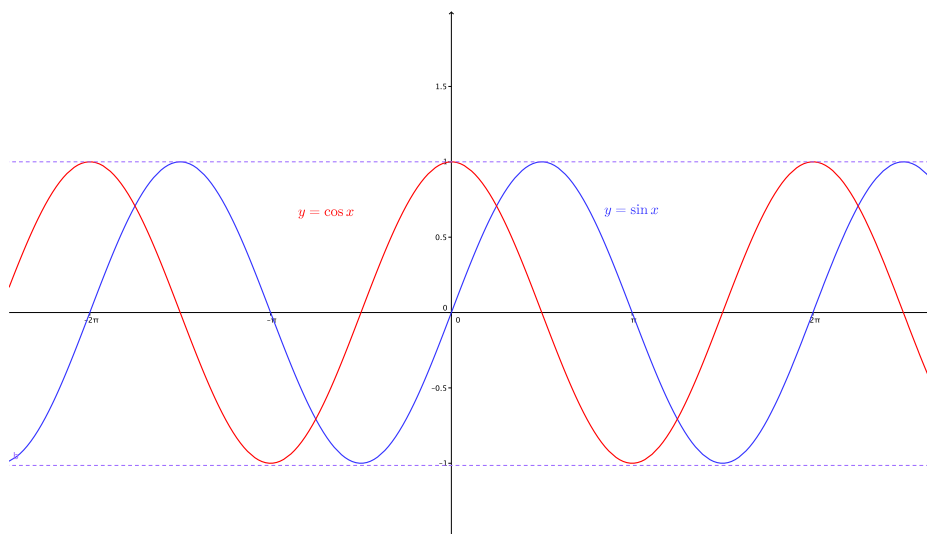


FIGURE 3 – Courbes des fonctions **sinus** et **cosinus**

Remarque

Soit u est une fonction de la variable x dérivable sur $\mathbb{R}$. On montre que, pour tout nombre réel x , on a :

$$(\sin(u(x)))' = u'(x) \times \cos(u(x)) \quad \text{et} \quad (\cos(u(x)))' = -u'(x) \times \sin(u(x)).$$

1.5 Fonction tangente

Soit

$$E = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On définit la fonction tangente, sur $\mathbb{R} \setminus E$, par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Voici quelques propriétés de cette fonction.

- La fonction tangente est périodique de période π et elle est impaire.
- Elle est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme :

$$\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[\text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Sa dérivée, sur tout intervalle de cette forme est donnée, par :

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

- Elle n'a pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

— On a :

$$\lim_{x \rightarrow +(\frac{\pi}{2})^+} \tan x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = -\infty.$$

La figure 4 ci-dessous contient la courbe représentative de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthogonal. On a représenté sur cette même figure les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Remarque

On montre que si u est une fonction de la variable x dérivable sur $\mathbb{R}$, alors on a, pour tout x dans le domaine de définition de la fonction tangente,

$$(\tan(u(x)))' = u'(x) \times (1 + \tan^2(u(x))).$$

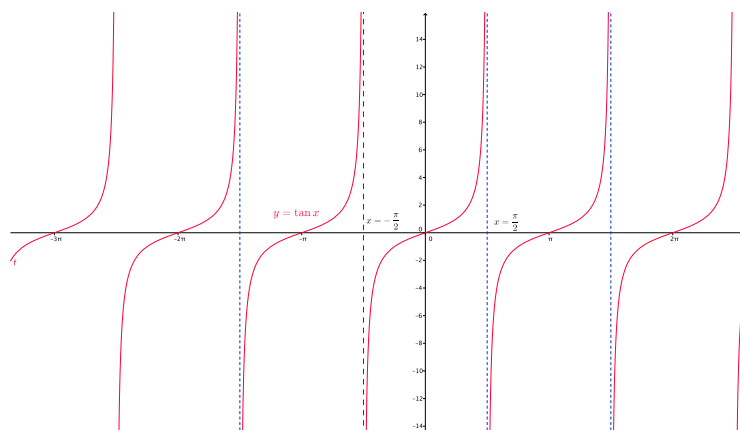


FIGURE 4 – Courbe de la fonction tangente

2 Formulaires de trigonométrie

2.1 Valeurs remarquables

Voir également le cercle ci-dessus.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Dans ce qui suit a, b, x, p, q désignent des nombres réels quelconques. Plusieurs relations du paragraphe qui suit s'obtiennent directement en "lisant" correctement le cercle trigonométrique.

2.2 Angles associés

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x. \\ \sin(-x) = -\sin x. \\ \tan(-x) = -\tan x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x. \\ \sin(\pi + x) = -\sin x. \\ \tan(\pi + x) = \tan x. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x. \\ \sin(\pi - x) = \sin x. \\ \tan(\pi - x) = -\tan x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi/2 + x) = -\sin x. \\ \sin(\pi/2 + x) = \cos x. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi/2 - x) = \sin x. \\ \sin(\pi/2 - x) = \cos x. \end{cases}$$

2.3 Formules fondamentales

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2.4 Formules d'addition et de duplication

Des formules fondamentales, on déduit les formules suivantes :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

2.5 Transformation de sommes en produits

En utilisant certaines formules d'addition, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.\end{aligned}$$

Pour a non nul, on a :

$$a \cos x + b \sin x = \rho \cos(x - \theta), \quad \text{où } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{b}{a}.$$