
S'exercer sur les rudiments de trigonométrie, fonctions trigonométriques

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles $\frac{-11\pi}{3}$, $\frac{33\pi}{4}$, $\frac{-17\pi}{6}$, $\frac{-75\pi}{8}$ puis placer sur le cercle trigonométrique les points associés, respectivement nommés M_0, M_1, M_2 et M_3 .

Exercice 2

En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x - \pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$.
2. $B = \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 3

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

1. $C = \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{11\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8}$.
2. $D = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{9\pi}{10}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \sin x$ et $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

Prouver que, lorsque les deux expressions suivantes sont simultanément définies, on a :

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x$.
Montrer que la fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Montrer que, pour tout nombre x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\cos^6 x + \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 1 = 0.$$

Exercice 8 Démontrer, pour tout nombre réel x , l'égalité :

$$(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x).$$

Exercice 9

Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, les nombres

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} \text{ et } \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

sont égaux.

Exercice 10 Déterminer un encadrement aussi fin que possible du nombre réel x lorsqu'il vérifie les trois conditions suivantes : $x \in [2\pi; 4\pi]$, $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$.

Exercice 11

Existe-t-il un nombre réel x tel que : $\cos x = \frac{4}{5}$ et $\sin x = \frac{-3}{5}$?

Exercice 12

Sachant que : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, calculer $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

Exercice 13

1. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Exercice 15 Une étude de fonction (1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
2. Montrer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'' .
3. Etudier les variations de f' . En déduire le signe de f' .
4. Etudier les variations de f .

Exercice 16 Une étude de fonction (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

$$f(x) = \tan x - x$$

Étudier la fonction f et Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.