

TD1 : Trinôme du second degré et nombres complexes

1. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ POUR UNE VARIABLE RÉELLE

Exercice 1. Ecrivez les expressions suivantes comme le début d'un carré :

- (1) $x^2 + 2x + 3$
- (2) $x^2 + 2x - 3$
- (3) $x^2 + 4x + 1$
- (4) $x^2 + 4x + 7$
- (5) $x^2 + 3x + 1$
- (6) $x^2 - 5x + 2$
- (7) $-x^2 + 2x + 1$
- (8) $-x^2 + 3x + 7$
- (9) $3x^2 + 6x + 1$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminez quand l'expression s'annule et son signe suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$. Vous pouvez au choix réécrire le début d'un carré pour factoriser, ou bien utiliser directement le théorème, ou bien faire un mélange des deux.

- (1) $x^2 + x - 2$
- (2) $1 - x^2$
- (3) $x^2 + 3x + 4$
- (4) $x^2 + 4x + 5$
- (5) $-3x^2 + 4x - 7$
- (6) $2x^2 - 5x - 3$

Exercice 3. On pose l'expression $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Pour quelles valeurs a-t'on $f(x) = 0$? Même question pour $f(x) = 6$ et $f(x) = -2$.

2. CALCULS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 4. Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1 - i)(3 + 4i), (1 + 2i)^3, (3 - i)(2 + i) + i - 7.$$

Exercice 5. Déterminez le module des complexes suivants :

$$2, 2i, 3 + 4i, (1 + i)(2 + i).$$

Exercice 6. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, montrez que $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Montrez que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ et que $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$.

Exercice 8. Mettez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+i}, \frac{1}{i}, \frac{i+1}{i}, \frac{2+3i}{3+5i}(1-i).$$

Exercice 9. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, montrez que $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

3. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET RACINES CARRÉES

Exercice 10. Déterminez les solutions complexes des équations suivantes :

$$z^2 + 2 = 0, \quad z^2 + 2z + 2 = 0; \quad z^2 + 6z + 13 = 0.$$

Exercice 11. Déterminez les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-8 + 6i$, $7 + 24i$, $3 + 4i$ et $4 + 3i$.