

TD3 : Fonctions un peu moins régulières

1. TRACÉS DE GRAPHS

Exercice 1. Déterminez les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 - x + 2 ; f_2(x) = x^2 + 3x + 6 ; f_3(x) = x^3 - 3x$$

2. VALEUR ABSOLUE

Exercice 2. Montrez les formules suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x_+ - x_- = x ; x_+ + x_- = |x| ; x_+ = \frac{x + |x|}{2}.$$

Exercice 3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, que vaut

$$\frac{x + y + |x - y|}{2}?$$

Exercice 4. Soit $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Déterminez une formule simple pour $f(x)$ suivant que x est dans tel ou tel intervalle.
- Dressez alors le tableau de variation de f et tracez son graphe.

Exercice 5. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 + |x|$.

Exercice 6. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 + |x - 1|$.

3. FONCTION DE HEAVISIDE

Exercice 7. Montrez que H est croissante. Est-elle strictement croissante ?

Exercice 8. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = xH(x)$.

4. BIJECTIONS

Exercice 9. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez des intervalles maximaux sur laquelle elle est bijective, et déterminez sa fonction réciproque :

(a) $x \mapsto 3x + 2$; (b) $x \mapsto x^2 - 4x + 7$ (c) $x \mapsto x^3 + 10x^2 - 7x + 1$, (d) $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 7x + 1$

$$(e) x \mapsto \frac{1}{x} , (f) x \mapsto \frac{x+1}{x-2} , (g) x \mapsto \frac{1}{x+1} - x$$

$$(h) x \mapsto \frac{x^2 + 2}{x - 1} , (i) x \mapsto \sqrt{2 - x^2} ; (j) x \mapsto e^{x^2}.$$