

TD4 : Limites

Dans tous ces exercices, on demande de déterminer la limite si elle existe.

1. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

- (1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - \sin x + x^7 - x^2$
- (2) Limites au bord de l'ensemble de définition de $f(x) := x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$
- (4) Ensemble de définition et limites aux bord de $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x+x}{x^2-x}$
- (10) Limites en -1 et -2 de $f(x) := \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6}$

2. UTILISATION DE LA DÉRIVÉE

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
Indication : posez $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $x_0 = 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2 \cos x}$
Indication : $\frac{\sin(3x)}{1-2 \cos x} = \frac{\sin(3x)}{x-\frac{\pi}{3}} \times \frac{x-\frac{\pi}{3}}{1-2 \cos x}$.
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

3. COMPARAISON

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$
Indication. On pose $h(x) = \frac{1}{2+\sin(1/x)}$. Encadrez $h(x)$. c'est-à-dire trouvez $a, b > 0$ tels que $a \leq h(x) \leq b$ pour tout $x \neq 0$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{2} \sin x$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

- (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 - \sqrt{x}$
 (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
 (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + x}{x^3 + e^{2x} - x^2 + 7}$

4. COMPOSITION

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$
 (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x+1}$.

Indication : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x+\sqrt{x}}}{x^5}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin \sqrt{x})}{x}$
 (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2}$

Indication : pour $x < 1$ et $x \neq 0$, on a

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{x-0} \rightarrow f'(0) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ avec } f(x) = \ln(1-x)$$

5. UN PEU DE RACINES (ENCORE)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+2}}{x^2+1}$
 (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

Indication : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ pour $a, b > 0$

Exercice 1. En utilisant les formules de trigonométrie, montrez que pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Déduisez-en que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$