

TD2 : Encore un peu d'espaces métriques

1. DISTANCE SUR UN PRODUIT

Exercice 1. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Sur le produit $X \times Y$, on définit

$$\begin{aligned} d : (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y') \end{aligned}$$

Pour toutes les questions de cet exercice, on pourra commencer par prendre X et Y des espaces vectoriels normés (et même $\mathbb{R}$) munis des distances associées aux normes respectives.

- (1) Montrez que d est une distance sur $X \times Y$.
- (2) Soit $A \subset X \times Y$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrez que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - A est ouvert pour la topologie de $(X \times Y, d)$;
 - Pour tout $(x, y) \in A$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in U \times V \subset A.$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{d} : (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2} \end{aligned}$$

- (3) Montrez que $\tilde{d}$ est une distance sur $X \times Y$.
- (4) Soit $A \subset X \times Y$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrez que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - A est ouvert pour la topologie de $(X \times Y, \tilde{d})$;
 - Pour tout $(x, y) \in A$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in U \times V \subset A.$$

- (5) Montrez que, dans $X \times Y$, les ouverts pour d sont exactement les ouverts pour $\tilde{d}$.

2. UNIFORME CONTINUITÉ

Exercice 2. Montrez qu'une fonction α -Hölderienne ($\alpha \in]0, 1]$) est uniformément continue.

Exercice 3. Montrez que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique Lip-connexe par arc (définition de mon cru : c'est-à-dire pour tous $x, y \in X$, il existe $\gamma \in C^0([0, 1], X)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ et γ est Lipschitzienne). Soit (Y, δ) un espace métrique et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction α -Hölderienne avec $\alpha > 1$. Pour $N \geq 1$, en découpant $[0, 1]$ en N intervalles égaux et en utilisant l'inégalité triangulaire, montrez que f est constante. On pourra commencer par le cas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrez que $[0, 1[$ n'est pas complet muni de la distance usuelle.

Exercice 6. Pour $n \geq 1$, on définit $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}$ pour $x \in [-1, 1]$. Montrez que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$. Déduez-en que $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ n'est pas complet muni de $\|\cdot\|_\infty$.

3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES MÉTRIQUES

Exercice 7. Montrez que dans tout espace métrique, un compact est fermé.

Exercice 8. Soit (X, d) un **espace métrique compact** au sens de la propriété de recouvrement ouvert. Montrez que de toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite qui converge. On pourra raisonner la caractérisation de la compacité par la fermée et la caractérisation des valeurs d'adhérence comme intersection de fermés.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique. Soit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- $K_n \subset X$ est compact non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- la suite (K_n) est décroissante, c'est-à-dire $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrez que $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
- (2) Soit U un ouvert de X tel que $K \subset U$. Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

4. TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Exercice 10 (MFA). Montrez l'unicité de la limite dans un espace topologique séparé.

Exercice 11 (MFA). Montrez que la topologie induite et la topologie produit sont bien des topologies.

Exercice 12 (MFA). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Soit $K \subset X$ un ensemble compact. On va montrer que K est fermé. On fixe $x \in X - K$ (qu'on suppose non-vide).

- (1) Montrez que pour tout $y \in K$, il existe U_y et V_y deux ouverts disjoints tel que $x \in U_y$ et $y \in V_y$.
- (2) En recouvrant K par des ouverts bien choisis, déduisez-en que $X - K$ contient un voisinage ouvert de x .
- (3) Concluez.

Exercice 13 (MFA). Montrez que, sous les mêmes hypothèses, la conclusion de l'Exercice 9 reste valide si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé.