

Devoir 2 : à rendre le 4 octobre

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subset X$, on définit les ensembles suivants :

$$A_1 := \{x \in X / \text{pour tout } O \text{ ouvert tel que } x \in O, \text{ alors } O \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_2 := \{x \in X / \text{pour tout } B \text{ boule ouverte telle que } x \in B, \text{ alors } B \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_3 := \{x \in X / \text{pour tout } r > 0, \text{ alors } B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Montrez que $A_1 = A_2 = A_3$. C'est l'adhérence de A .

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeur dans X et soit $x \in X$. Montrez l'équivalence des deux propositions suivantes :

- La suite $(x_n)_n$ ne converge pas vers x ;
- Il existe $\epsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(x_{j(n)})$ tels que $d(x_{j(n)}, x) > \epsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Rédigez la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie esquissée en cours.

Exercice 4. Soient $A, B \subset E$ un evn tels que

- A, B non vides,
- A est fermé et B est compact
- $A \cap B = \emptyset$

On montre ici de façon séquentielle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|a - b\| \geq \delta$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.

- Montrez que si la conclusion est fausse, alors il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Concluez en utilisant les propriétés de A et B .

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$ au sens

$$\forall A > 0, \exists R > 0 \text{ tel que } \forall x \in E \{ \|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > A \}.$$

Montrez alors que φ admet un minimum sur E .

Note : Ce résultat sera généralisé à la dimension infinie pour des fonctions convexes sur des Hilbert.