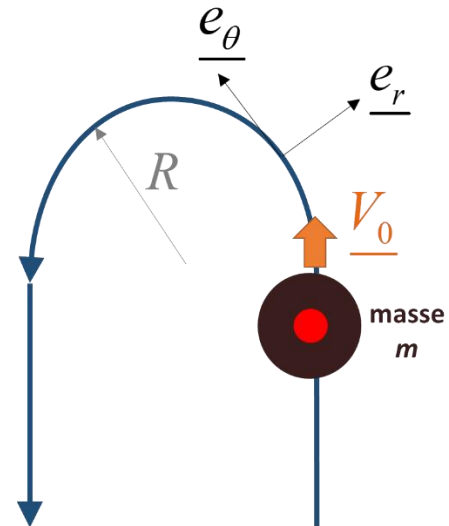


On s'intéresse au cas où des bouteilles de masse m sont transportées sur la chaîne de production à l'aide d'un tapis roulant. Une bouteille s'apprête à aborder un virage sur ce tapis roulant à une vitesse constante $\underline{V}_0$. On cherche à connaître le rayon minimal de ce virage, permettant à la bouteille de ne pas basculer.



1. Dans le repère cylindrique associé au virage que fait le tapis roulant, on peut noter la vitesse $\underline{V}_0 = V_0 \underline{e}_\theta$ avec $V_0 = R \dot{\theta}$. Montrer que l'accélération centripète dans le virage s'écrit sous la forme :

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -\frac{V_0^2}{R} \underline{e}_r$$

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \frac{d(V_0 \underline{e}_\theta)}{dt}$$

Comme la vitesse d'entrée V_0 est constante il suffit de calculer : $\frac{d\underline{e}_\theta}{dt}$

Il est alors intéressant d'écrire :

$$\begin{cases} \underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \end{cases}$$

On en déduit : $\frac{d\underline{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_2 = -\dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) = -\dot{\theta} \underline{e}_r$

Il vient alors que $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(V_0 \underline{e}_\theta)}{dt} = -V_0 \dot{\theta} \underline{e}_r$

Comme $V_0 = R \dot{\theta}$ il vient alors $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -\frac{V_0^2}{R} \underline{e}_r$

2. Faire un bilan des deux efforts extérieurs qui s'appliquent sur la bouteille de masse m .

La bouteille est soumise à deux efforts :

le poids : $\underline{P} = -mg\underline{e}_z$ (centre de gravité)

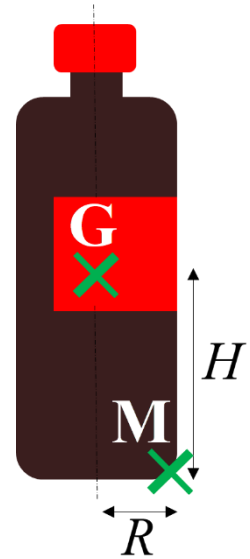
l'effort de réaction du support $\underline{R}$

3. Déterminer la réaction du support $\underline{R}$ en s'appuyant sur la question 1.

$$\underline{P} + \underline{R} = m\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$$-mg\underline{e}_z + \underline{R} = -m\frac{V_0^2}{R}\underline{e}_r$$

$$\underline{R} = m\left(g\underline{e}_z - \frac{V_0^2}{R}\underline{e}_r\right)$$



4. La condition de basculement se situe lorsque le point d'application de cet effort de réaction se situe au bord de la bouteille (comme dans le TD1). En considérant que le poids de la bouteille s'applique au point G et que le l'effort de réaction s'applique au point M sur la figure ci-dessous, traduire cette condition de basculement.

La somme des moments créés par les deux efforts $\underline{P}$ et $\underline{R}$ doit donc être nulle pour assurer l'équilibre du système.

Exprimé au point G, le moment du poids est nul. Le moment de l'effort de réaction s'écrit :

$$\mathcal{M}_G(\underline{R}) = \underline{GM} \wedge \underline{R} = \underline{0}$$

$$\underline{GM} = -H\underline{e}_z + R_{bout}\underline{e}_r$$

$$\underline{R} = m\left(g\underline{e}_z - \frac{V_0^2}{R}\underline{e}_r\right)$$

$$(-H\underline{e}_z + R_{bout}\underline{e}_r) \wedge m\left(g\underline{e}_z - \frac{V_0^2}{R}\underline{e}_r\right) = \underline{0}$$

$$Hm\frac{V_0^2}{R}\underline{e}_\theta - R_{bout}mg\underline{e}_\theta = \underline{0}$$

5. En déduire une condition sur le rayon minimal du virage.

La condition précédente se traduit par :

$$Hm\frac{V_0^2}{R} = R_{bout}mg \Rightarrow \frac{HV_0^2}{R_{bout}g} = R$$

6. Application numérique : une bouteille de 1kg et de 10cm de diamètre arrive à une vitesse de 1m.s^{-1} sur le tapis roulant. Son centre de gravité se trouve à 10 cm de hauteur. (rappel : constante de gravité $g=9.81\text{m.s}^{-2}$)