

## TD6 : Intégration

**Exercice 1.** Calculez les intégrales suivantes

- (1)  $\int_0^2 3\sqrt{t} dt$
- (2)  $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$
- (3)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt$
- (4)  $\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$
- (5)  $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx$
- (6)  $\int_0^1 \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt$
- (7)  $\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}$
- (8)  $\int_2^5 \frac{dt}{t \ln t}$
- (9)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (2 \sin t + 3 \cos t) dt$

**Exercice 2.** Déterminez

$$\int_{-3}^5 (|x-1| + |x| + |x+1|) dx \text{ et } \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sin |t| dt$$

**Exercice 3.** 1. Calculez  $\tan'$ . Déduisez-en  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \tan^2(t)) dt$ .

2. Calculez  $\int_0^x \tan^n(t) dt$  pour  $n = 0, 1, 2$  et  $x \in [0; \pi/2[$

**Exercice 4.** A l'aide d'une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes :

- (1)  $\int_0^1 (t+1)e^t dt$
- (2)  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$
- (3)  $\int_0^\pi (x+3) \sin x dx$
- (4)  $\int_{-\pi/2}^0 x \sin(2x-1) dx$
- (5)  $\int_0^x t^2 \sin t dt$
- (6)  $\int_1^t \ln x dx, \text{ où } t \geq 1$
- (7)  $\int_1^t x \ln(x+3) dx, \text{ où } t \geq 1$
- (8)  $\int_0^x te^t dt, \text{ où } x \geq 0$

$$(9) \int_0^x t^2 e^t dt, \text{ où } x \geq 0$$

$$(10) \int_0^x (t^3 - 1)e^t dt, \text{ où } x \geq 0$$

**Exercice 5.** Déterminez des primitives des fonctions suivantes :  $x \mapsto 3x - \sin \frac{x}{2} + 5 \cos(3x)$  et  $x \mapsto \tan^2(2x)$

**Exercice 6.** En écrivant sous forme d'exponentielle, déterminez une primitive de  $x \mapsto a^x$  pour  $a > 0$ . Déduisez-en

$$\int_{-1}^3 (2^t - t^2 + 3t - 5\sqrt{t}) dt.$$

**Exercice 7.** On va déterminer une primitive de  $x \mapsto f(x) = e^x \sin x$  de deux façons :

- (1) Méthode 1 : Nombres complexes. En écrivant  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ , déterminez une primitive de  $f$  par un calcul direct.
- (2) Méthode 2 : Intégrations par parties. En intégrant deux fois par parties, déterminez  $\int_0^x f(t) dt$ .

**Exercice 8.** Soit  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) Calculez  $I_0, I_1, I_2$
- (2) En intégrant par parties, trouvez une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$
- (3) Déduisez-en  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$  pour  $p \in \mathbb{N}$  quelconque.

**Exercice 9.** Trouvez les primitives des fonctions suivantes

- (1)  $f(x) = x^2 \exp(\sin(x^3)) \cos(x^3)$
- (2)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- (3)  $h(x) = \sin^5(x)$
- (4)  $m(x) = \arcsin x$

**Exercice 10.** Calculez les primitives des fonctions suivantes, en utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

- (1)  $\frac{1}{x^2 - 4},$
- (2)  $\frac{x^4}{x^2 + x - 2}$
- (3)  $\frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 + x + 5}$
- (4)  $\frac{x^2}{(x^2 + 1)(x - 1)}$
- (5)  $\frac{1}{x^2 + 4}$
- (6)  $\frac{14x + 5}{7x^2 + 4x + 9}$