

**Devoir 4 : à rendre la semaine du 8 novembre. Recommandé
 pour réviser une partie du partiel**

Exercice 1. On munit $C^0([0, 1])$ de la norme $\|u\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$. Pour chacune des applications suivantes, montrez qu'elle est linéaire continue, calculez la norme et déterminer si la norme est atteinte ou pas.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_1 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x) dx \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} T_2 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_3 : \{f \in C^0([0, 1]) / f(0) = 0\} & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right\}$$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que le produit externe

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pi : \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right\}$$

est continu (en munissant $\mathbb{R} \times E$ de la norme produit).

Exercice 3. En utilisant uniquement que toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente, montrez que $[-1, 1]^2$ est compact, puis que $[-1, 1]^n$ est compact pour tout $n \geq 1$.