

Partiel 1 du 8 novembre

Durée 2h. Documents et machines électroniques interdits.

On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des sous-ensembles suivant, indiquez s'il est ouvert, fermé ou bien ni l'un ni l'autre :

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 < 1 \text{ et } 3x + y > 0\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 - y^3 < 0\}$

Chaque réponse devra être démontrée.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $F \subset E$ un sous-ev de dimension finie. On se donne $x_0 \in E$. On définit alors

$$\mu := \inf\{\|x_0 - y\| / y \in F\}.$$

1. Montrez que $\mu \in \mathbb{R}$ est bien défini. Que vaut μ si $x_0 \in F$?
2. Montrez qu'il existe $M > 0$ tel que pour $y \in F$, on a $\|y\| \geq M \Rightarrow \|x_0 - y\| \geq \mu + 1$.
3. Déduisez-en que $\mu := \inf\{\|x_0 - y\| / y \in F \text{ et } \|y\| \leq M\}$.
4. Par un argument de compacité, déduisez-en que l'infimum est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\mu = \|x_0 - y_0\|$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Soit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- $K_n \subset X$ est compact non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- la suite (K_n) est décroissante, c'est-à-dire $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrez que $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
- (2) Soit U un ouvert de X tel que $K \subset U$. Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 4. 1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez la norme de u lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

2. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{cases} T : C^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x^2) dx \end{cases}.$$

Montrez que T est linéaire continue et déterminez sa norme.

1. PROBLÈME : HYPERBOLICITÉ ET POINT FIXE

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ et $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On se donne $T_i : E_i \rightarrow E_i$ pour $i = 1, 2$ tels que

- Les fonctions T_1, T_2 sont linéaires et bijectives,

— Il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\|T_1(x)\|_{E_1} \leq \frac{\|x\|_{E_1}}{\lambda} \text{ pour tout } x \in E_1 \text{ et } \|T_2(x)\|_{E_2} \geq \lambda\|x\|_{E_2} \text{ pour tout } x \in E_2$$

On définit l'espace vectoriel $E := E_1 \times E_2$ qu'on munit de la norme

$$\|(x, y)\|_E := \max\{\|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_2}\} \text{ pour tous } (x, y) \in E_1 \times E_2.$$

1. Montrez que $\|\cdot\|_E$ est bien une norme sur E .

Tout élément de E sera alors systématiquement noté (x, y) avec $x \in E_1$ et $y \in E_2$.

On note p_1 et p_2 les projections

$$p_1 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E_1 \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E_2 \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

On définit alors

$$T : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & (T_1(x), T_2(y)) \end{array}$$

Dans ce problème, on cherche des conditions sur $f : E \rightarrow E$ une fonction *pas nécessairement linéaire* pour que $T + f$ admette un point fixe.

2. Montrez que T est linéaire bijective

3. Montrez que $T + f$ admet un point fixe si et seulement si S admet un point fixe, où

$$S : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & (T_1(x) + p_1(f(x, y)), T_2^{-1}(y) - T_2^{-1}(p_2(f(x, y)))) \end{array}$$

4. On suppose que f est ϵ -Lipschitzienne avec $\epsilon > 0$. Montrez que pour $\epsilon > 0$ assez petit, S est contractante.

5. Concluez en montrant que pour $\epsilon > 0$ assez petit, $T + f$ admet un point fixe.

2. CONTINUITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M\|x - y\| \text{ pour tous } t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (On dit que f est Lipschitzienne en la seconde variable).

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda f(t, u(t)) & \text{pour } t \in [0, 1] \\ u(0) = x_0 \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

1. Soit $u \in C^0([0, 1])$. Montrez que

$$\{u \in C^1([0, 1]) \text{ solution de } (E_\lambda)\} \Leftrightarrow \left\{ u(t) = x_0 + \int_0^t \lambda f(s, u(s)) ds \text{ pour tout } t \in [0, 1] \right\}$$

On pose alors

$$T : \begin{array}{ccc} C^0([0, 1]) & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ u & \mapsto & (t \mapsto x_0 + \int_0^t \lambda f(s, u(s)) ds) \end{array}$$

2. En utilisant un argument de point fixe, montrez qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $|\lambda| < \epsilon_0$, alors (E_λ) admet une unique solution, notée u_{λ, x_0} .

3. Pour $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, en écrivant $u_{\lambda, x_0} - u_{\lambda, y_0}$ et que $u_{\lambda, x_0}, u_{\lambda, y_0}$ sont solutions de problèmes de points fixes, montrer qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ (probablement le même que ϵ_0) tel que pour $|\lambda| < \epsilon_1$, alors $x_0 \mapsto u_{\lambda, x_0}(1)$ est continue.

4. Généralisation 1 : montrez qu'il existe $\epsilon_2 > 0$ (probablement le même que ϵ_0) tel que pour tout $|\lambda| < \epsilon_2$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\lambda : & \mathbb{R}^n & \rightarrow C^0([0, 1]) \\ & x_0 & \mapsto u_{\lambda, x_0} \end{array}$$

est continue pour les normes naturelles.

5. Généralisation 2 : montrez qu'il existe $\epsilon_3 > 0$ (probablement le même que ϵ_0) tel que

$$\begin{array}{ccc} \varphi : &]-\epsilon_3, \epsilon_3[\times \mathbb{R}^n & \rightarrow C^0([0, 1]) \\ & (\lambda, x_0) & \mapsto u_{\lambda, x_0} \end{array}$$

pour les normes naturelles associées. Dans un premier temps, on pourra supposer que f est bornée sur $\mathbb{R}^n$.