

Examen du 22 novembre (CC2)

Les exercices peuvent être traité dans l'ordre que vous voulez

Exercice 1. Déterminez la limite si elle existe :

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x - 1}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 + 1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^7 + x(\sin x) + 1}{x^3 + x^2 + 2}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x \cos x}{x^4 + x^2 \sin(x^2)}$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln x}$$

Exercice 2. Limites aux bornes de l'ensemble de définition (incluant éventuellement l'infini) de

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

Exercice 3. Ensemble de définition, ensemble de dérivabilité et dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas de simplification des expressions des dérivées)

(1) $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{1 + e^x}$

(2) $x \mapsto \sqrt{\cos x}$

(3) $x \mapsto \frac{2 + \sin x}{2 - \cos x}$

Calculez la dérivée seconde de la 3ème fonction ci-dessus

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, tracez le graphe et déterminez, s'ils existent, le minimum global, le max global, et les min et max locaux.

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 2]$.

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = 3|x - 2| - 4|x + 1|$ sur $\mathbb{R}$.

(4) $x \mapsto x^3 + e^x + \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5. Montrez que

$$x + \frac{8}{x^2} \geq 4 \text{ pour tout } x > 0.$$

Exercice 6. (1) Montrez que $-e^{-1} \leq x \ln x < 0$ pour tout $x \in]0, e^{-1}]$.

(2) Montrez que $|\sqrt{x} \ln x| \leq 2e^{-1}$ pour tout $x \in]0, e^{-2}]$.

(3) Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que $|x \ln x| \leq C\sqrt{x}$ pour tout $x \in]0, e^{-2}]$.

(4) Que peut-on en déduire pour $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln x$?

FIN