

Contrôle : Théorème de Lax-Milgram

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (non nécessairement symétrique). On suppose que la forme est coercive, à savoir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

Soit $f \in H'$ une forme linéaire continue et soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de H . L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique élément $u_0 \in F$ tel que

$$a(u_0, v) = f(v) \text{ pour tout } v \in F \quad (E)$$

- (1) Montrez qu'il existe $A : H \rightarrow H$ telle que

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \text{ pour tous } u, v \in H.$$

- (2) Montrez que $A : H \rightarrow H$ est linéaire et continue.
 (3) Montrez qu'il existe $x_0 \in H$ tel que le problème (E) revient à montrer l'existence de $u_0 \in F$ unique tel que

$$\langle A(u_0) - x_0, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F$$

- (4) On se donne $\rho > 0$ et on définit

$$\begin{aligned} T : F &\rightarrow F \\ u &\mapsto \pi_F(u - \rho(A(u) - x_0)), \end{aligned}$$

où π_F est la projection orthogonale sur F . Montrez que le problème (E) revient à montrer l'existence de $u_0 \in F$ unique tel que

$$T(u_0) = u_0. \quad (\star)$$

- (5) Montrez que pour un choix judicieux de $\rho > 0$, T est contractante.
 (6) Montrez l'existence de $u_0 \in F$ unique tel que que $(\star)$ a lieu.
 (7) Concluez.

HORS BAREME : pour celles et ceux qui s'ennuient et veulent aller plus loin. On garde les mêmes hypothèses et notations. Soit K un convexe fermé de H . On cherche à montrer qu'il existe $u_K \in K$ tel que

$$a(u_K, v - u_K) \geq f(v - u_K) \text{ pour tout } v \in K. \quad (E_K)$$

- (1) En vous inspirant de ce qui a été fait dans la partie précédente, montrez qu'il existe $x_0 \in H$ tel que pour tout $\rho > 0$, le problème (E_K) revient à montrer l'existence de $u_K \in H$ tel que

$$u_K = \pi_K(u_K - \rho(A(u_K) - x_0)),$$

où π_K est la projection orthogonale sur le convexe K .

- (2) Concluez par un théorème de point fixe