

**TD7 : Diagonalisation des endomorphismes symétriques et
 Transformée de Fourier**

1. DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES COMPACTS

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $T : H \rightarrow H$ un endomorphisme continu, symétrique. On suppose de plus que T est compact, c'est-à-dire que pour tout ensemble $A \subset H$ borné, alors $\overline{T(A)}$ est compact (on dit que $T(A)$ est relativement compact).

1. On suppose que $\langle T(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Montrez que $T \equiv 0$.
2. On suppose que $T \neq 0$. Montrez qu'on peut supposer que

$$\lambda_0 := \sup_{x \in H - \{0\}} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|^2} > 0. \quad (\star)$$

3. On suppose que $(\star)$ a lieu.

3.1. Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in H$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T(x_n), x_n \rangle = \lambda_0$

3.2. On va montrer qu'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge fortement vers $x \in H$, $x \neq 0$.

3.2.a. Montrez qu'il existe une sous-suite de (x_n) (notée $(x_{j(n)})$) qui converge faiblement vers un élément $x \in H$.

3.2.b. Montrez qu'il existe une autre sous-suite $(x_{j \circ k(n)})$ telle que $(T(x_{j \circ k(n)}))_n$ converge fortement vers $y \in H$.

3.2.c. En utilisant la symétrie de T , montrez que $y = T(x)$.

3.2.d. Soit $(u_n) \rightarrow u$ dans H fortement et $v_n \rightarrow v$ dans H faiblement. Montrez que $\lim_n \langle u_n, v_n \rangle = \langle u, v \rangle$.

3.2.e. Déterminez la limite de $\langle T(x_{\phi(n)}), x_{\phi(n)} \rangle$ et déduisez-en que $\langle T(x), x \rangle = \lambda_0 > 0$.

3.2.f. Déduisez-en que $\|x\| = 1$ puis que (x_n) converge fortement à extraction près.

3.3. En utilisant qu'un maximum local est point critique, montrez que x est vecteur propre de T . Alternative : on pourra utiliser le théorème des extrema liés.

4. On pose $\text{Spec}(T) := \{ \text{Valeurs propres de } T \}$. Pour $\lambda \in \text{Spec}(T)$, on note E_λ le sous-espace propre de λ . On pose

$$F := \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(T)} E_\lambda.$$

4.1. Montrez que F et $F^\perp$ sont stables par T .

4.2. On pose $S : F^\perp \rightarrow F^\perp$ définie par $S(x) = T(x)$ pour tout $x \in F^\perp$. Montrez que $S \equiv 0$.

4.3. Déduisez-en que H est somme Hilbertienne des sous-espaces propres de T (en d'autres termes, $\overline{F} = E$).

2. TRANSFORMATION DE FOURIER

Exercice 1. On définit la fonction triangle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez sa transformée de Fourier si elle est définie.

Exercice 2. On se donne $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrez les propriétés suivantes (notation un peu abusive, mais assez explicite) :

- $\widehat{f(x)e^{i\alpha x}} = \hat{f}(\xi - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(x - \alpha)} = \hat{f}(\xi)e^{-i\alpha\xi}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(\lambda x)} = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ pour tout $\lambda > 0$

Que devient la seconde formule lorsque $\lambda < 0$?

Exercice 3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. En suivant les indications du cours, montrez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existent.

Exercice 4. Déterminez la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[a,b]}$ de deux manières :

- Par le calcul direct ;
- En utilisant la transformée de $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ vue en cours et l'exo précédent.

Exercice 5. Montrez l'existence d'une unique solution $y \in C^2(\mathbb{R})$ du problème

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = f & \text{dans } \mathbb{R} \\ y \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

où $f(t) = e^{-|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.