

Partiel 2 du 14 janvier

On pourra résoudre certaines questions en admettant les résultats d'autres questions. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. **Un formulaire est en fin de sujet.**

1. EXERCICES

Exercice 1. Soit la fonction triangle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminez sa transformée de Fourier (si elle est définie). En utilisant le théorème de Plancherel, déduisez-en $\int_0^\infty \frac{(\sin x)^4}{x^4} dx$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach. Soit $A \in C^0([0, 1], L_c(E, E))$ continue telle que

- Il existe $c > 0$ tel que $\|A(\lambda)[x]\|_E \geq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in [0, 1]$;
- $A(0) : E \rightarrow E$ est bijective continue, d'inverse continu.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, on dira que $A(\lambda)$ est *invertible* si $A(\lambda) : E \rightarrow E$ est bijective continue, d'inverse continu.

1. Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A(\lambda)$ est un homéomorphisme pour tout $\lambda \in [0, \epsilon]$.
2. Montrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, si $A(\lambda)$ est invertible, alors $\|A(\lambda)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \alpha$.
3. Montrez qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\lambda_0 \in [0, 1]$ tel que $A(\lambda_0)$ est invertible, alors $A(\lambda)$ est invertible pour tout $\lambda \in [0, 1]$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \beta$.
4. Montrez que $A(\lambda)$ est invertible pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

2. PROBLÈME 1 : MINIMISATION

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $F \in C^1(H)$
- F est bornée sur H
- Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $z \in H$ tel que $z_n \rightharpoonup z$ (faiblement), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(z_n) = F(z).$$

On pose

$$J(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - F(x) \text{ pour tout } x \in H.$$

1. Montrez que $m := \inf\{J(x) / x \in H\}$ existe. On se donne alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante pour J , c'est-à-dire $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = m$.
2. Montrez qu'il existe $x \in H$ et une sous-suite, notée $(x_{j(n)})$, qui converge faiblement vers x .
3. On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe une suite (t_n) telle que $J(x_{j(n)}) = J(x) + t_n + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que $J(x) = m$.

5. Montrez qu'il existe $\varphi : H \rightarrow H$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in H$, on a $dF_x(y) = \langle \varphi(x), y \rangle$. Ici, dF_x désigne la différentielle de F au point x .
6. Déduisez-en que $x = \varphi(x)$.

A propos de cette méthode : Elle est utilisée pour résoudre des équations différentielles mises sous une forme dite "faible".

3. PROBLÈME 2 : L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER LINÉAIRE

Pour $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on cherche à prouver l'existence d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (E)$$

Ici, $i = \sqrt{-1}$ est bien un complexe.

1. Effectuez la résolution formelle de (E).

Dans toute la suite du problème, on notera $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cette solution formelle.

2. On suppose que $u_0 \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $u_0^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{u_0^{(k)}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $k = 0, \dots, 4$. Montrez alors que la solution formelle u trouvée au 1. est une solution de (E).

3. En plus des hypothèses de 2. on suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrez alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Sous les hypothèses de 3., montrez que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & u(t, \cdot) \end{array} \right\} \text{ est continue}$$

A propos de cette équation : Elle a entre autre été utilisée pour modéliser des lasers. Vous notez qu'il faut demander beaucoup de régularité sur u_0 pour obtenir une solution C^2 . C'est une des difficultés essentielles de cette équation.

4. FORMULAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque cela fait sens, on définit sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sous réserve des bonnes hypothèses, on a alors

- (1) $\widehat{f(x-a)} = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ pour $a, \xi \in \mathbb{R}$;
- (2) $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$;
- (3) $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$
- (4) $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$

Important/Attention : ce formulaire ne comporte pas d'hypothèse. C'est volontaire, à vous de les écrire correctement si vous avez besoin des formules.