

Partiel 2 du 13 janvier

Pour chaque question, on n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente en indiquant la référence.

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. Déterminez la transformée de Fourier de l'indicatrice $\mathbf{1}_{]-1,1[}$.

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème [Banach-Steinhaus v2] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit une famille $(T_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $T_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue. On pose

$$X := \{x \in E / \text{ la famille } \{T_i(x)/i \in I\} \text{ est bornée dans } \mathbb{R}\}.$$

On suppose que $\text{Int}(X) \neq \emptyset$. Alors il existe $C > 0$ tel que $|T_i(x)| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $i \in I$.

On se donne $(E, \|\cdot\|)$, $(T_i)_i$ et X comme dans l'énoncé. On définit

$$F_k := \{x \in E / |T_i(x)| \leq k \text{ pour tout } i \in I\}.$$

1. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, F_k est fermé dans E .
2. Déterminez $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$.
3. En utilisant le Lemme de Baire, montrez que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Int}(F_{k_0}) \neq \emptyset$.
On se donne $x_0 \in \text{Int}(F_{k_0})$ et $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset F_{k_0}$.
4. Soit $z \in E \setminus \{0\}$. Montrez que $x_0 + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{z}{\|z\|} \in F_{k_0}$.
5. Soit $z \in E \setminus \{0\}$. En utilisant la question précédente, montrez que

$$|T_i(z)| \leq \frac{4k_0}{\delta} \|z\|.$$

6. Concluez

1. PROBLÈME 1 : MINIMISATION

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. On se donne une fonction $m : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- Il existe $c_0 > 0$ tel que $c_0^{-1}\|x\| \leq m(x) \leq c_0\|x\|$ pour tout $x \in H$.
- $m(\lambda x) = |\lambda|m(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in H$.
- Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $z \in H$ tel que $z_n \rightharpoonup z$ (faiblement), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(z_n) = m(z).$$

On pose

$$J(x) := \frac{\|x\|^2}{m(x)^2} \text{ pour tout } x \in H \setminus \{0\}.$$

1. Montrez que $\lambda := \inf_{x \in H \setminus \{0\}} J(x)$ est définie et que $0 < \lambda < +\infty$.

2. Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

$$x_n \in H \setminus \{0\} \text{ et } m(x_n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \lambda.$$

3. Montrez qu'il existe $x \in H$ et une sous-suite, notée $(x_{j(n)})$, qui converge faiblement vers x .

4. On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe une suite (t_n) telle que $J(x_{j(n)}) = J(x) + t_n + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrez que $J(x) = \lambda$ et que le minimum est atteint.

2. PROBLÈME 2 : L'ÉQUATION DES ONDES

Pour $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on cherche à prouver l'existence d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (E)$$

1. Effectuez la résolution formelle de (E). *Indication : au cours de la preuve, vous devez trouver $\hat{u}(t, \xi) = \widehat{u_0}(\xi) \cos(|\xi|t)$ pour t, ξ bien choisis avec $\hat{u}(t, \xi)$ défini comme il se doit).*

Dans toute la suite du problème, on notera $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cette solution formelle.

2. On suppose que $u_0 \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $u_0^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{u_0^{(k)}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $k = 0, \dots, 4$. Montrez alors que la solution formelle u trouvée au 1. est une solution de (E).

3. PROBLÈME 3 : DIVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

Ce problème est indépendant du devoir sur les séries de Fourier. On note

$$C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$$

On munit cet espace de la norme usuelle $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Pour $f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(f)$ sa série de Fourier à l'ordre N .

L'objectif de ce problème est de démontrer qu'il existe $Y \subset C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ un ensemble dense pour $\|\cdot\|_\infty$ tel que

$$\text{pour tout } f \in Y, (S_N(f)[0])_N \text{ ne converge pas vers } f(0).$$

1. Montrez que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$.

On admet les résultats A, B, C suivants :

A. $(C_{2\pi}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)[x] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t) dt \text{ avec } D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ paire et } D_N \in L^1([0, 2\pi]).$$

C. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |D_N(y)| dy = +\infty$.

Pour $f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$, on pose $T_N(f) := S_N(f)[0]$.

2. Montrez que $T_N : (C_{2\pi}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue et que

$$\|T_N\|_{C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}} \leq \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1([0, 2\pi])}$$

3. Pour $\epsilon > 0$, montrez que

$$\left| |z| - \frac{z^2}{\sqrt{\epsilon + z^2}} \right| = \frac{\epsilon|z|}{\sqrt{\epsilon + z^2} (|z| + \sqrt{\epsilon + z^2})} \leq \sqrt{\epsilon} \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}.$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $f_N^\epsilon(t) := \frac{D_N(t)}{\sqrt{\epsilon + |D_N(t)|^2}}$

4. Montrez que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_N^\epsilon\|_\infty = 1$.

5. En estimant $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_N(f_N^\epsilon)$, montrez que

$$\|T_N\|_{C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}} = \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1([0, 2\pi])}$$

On pose

$$X := \{f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) / \text{la suite } (S_N(f)[0])_N \text{ est bornée}\} \text{ et } Y = C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) \setminus X.$$

6. En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus v2 (Exercice 1) et les questions précédentes, montrez que $\text{Int}(X) = \emptyset$.

7. Concluez.

4. FORMULAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque cela fait sens, on définit sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sous réserve des bonnes hypothèses, on a alors

- (1) $\widehat{f(x-a)} = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ pour $a, \xi \in \mathbb{R}$;
- (2) $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$;
- (3) $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$
- (4) $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$

Important/Attention : ce formulaire ne comporte pas d'hypothèse. C'est volontaire, à vous de les écrire correctement si vous avez besoin des formules.

FIN