

---

## TD 3 : Cauchy et conséquences, séries entières

---

### Rappels :

On considère un ouvert borné  $U$  dont le bord est une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $f \in \mathcal{O}(V)$ , où  $\bar{U} \subset V$ . Alors :

- Théorème de Cauchy :

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0.$$

- Formule intégrale de Cauchy : pour tout  $a \in U$ , on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Soient  $U$  un ouvert et  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Soient  $a \in U$  et  $r > 0$  tel que  $D(a, r) \subset U$ . Alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $a$  et on a :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

---

## 1 Séries entières

**Exercice 1.** (a) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence  $\sqrt{7}$ .

La série  $\sum_n \frac{z^n}{\sqrt{7}^n}$ .

- (b) Est-il possible de trouver des suites  $a_n$  et  $b_n$  avec  $a_n = o(b_n)$ , et telles que les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  aient le même rayon de convergence ?

Oui, par exemple  $b_n = 1$  et  $a_n = \frac{1}{n}$ .

- (c) Quel est le lien entre le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  et celui de  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ?  
Ce sont les mêmes.

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

(a)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$

Le rayon de convergence vaut 1 d'après la règle de d'Alembert.

(b)  $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$

Le rayon de convergence vaut  $+\infty$  d'après la règle de d'Alembert.

**Exercice 3.** Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  dans les cas suivants :

(a)  $(a_n)$  tend vers une limite  $l \in \mathbb{R}^*$ .

Il vaut 1 par d'Alembert.

(b)  $(a_n)$  est périodique et non identiquement nulle.

Il vaut 1.

(c)  $(a_n)$  est le nombre de diviseurs de  $n$ .

On a  $2 \leq a_n \leq n$ , donc par encadrement, le rayon de convergence vaut 1.

(d)  $(a_n)$  est la  $n$ -ème décimale de  $\pi$  (on admet que  $\pi$  est irrationnel).

Comme  $\pi$  n'est pas un nombre décimal, son écriture décimale est infinie, c'est-à-dire qu'une infinité de  $a_n$  sont compris entre 1 et 9. Donc la série  $\sum a_n$  diverge et le rayon de convergence vaut 1.

**Exercice 4.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 0$ . Montrer que  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

Soit  $r < \rho$ . Alors  $a_n r^n$  converge vers 0 par définition du rayon de convergence. Ainsi,

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{(1/r)^n}{n!} a_n r^n = o\left(\frac{(1/r)^n}{n!}\right).$$

Par comparaison, le rayon de convergence de  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  est infini.

**Exercice 5.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 0$ , avec  $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\alpha > 0$ .

Quel est le rayon de convergence de la série  $\sum a_n^\alpha z^n$  ?

Il vaut  $\rho^{1/\alpha}$ .

**Exercice 6** (Théorème des zéros isolés faible). Soit  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tq  $S$  soit identiquement nulle sur  $] -\alpha, \alpha[$ . Montrer que  $S$  est identiquement nulle.

Solution : Soit  $x \in ] -\alpha, \alpha[$ . Pour  $h$  suffisamment petit,  $x+h \in ] -\alpha, \alpha[$ , donc  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ .

Ainsi  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ . De la même façon, on montre que  $f^{(k)} = 0$  sur  $] -\alpha, \alpha[$  pour

tout entier  $k$ . Or on sait que  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  pour tout entier  $n$ . Par conséquent, les coefficients de  $f$  sont tous nuls, donc  $f$  est nulle.

**Exercice 7** (Théorème des zéros isolés). Soit  $f$  une fonction non identiquement nulle et développable en série entière sur un ouvert connexe non vide  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Démontrer que l'ensemble  $Z$  des zéros de  $f$  est un sous-ensemble fermé de  $U$  constitué de points isolés.

Solution :

Soit  $x \in Z$ . On peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-x)^n$$

au voisinage de  $x$  car  $a_0 = f(x) = 0$ . Soit  $k \geq 1$  le plus petit entier tel que  $a_k \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-x)^n \\ &= (z-x)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} (z-x)^n \\ &= (z-x)^k \left( a_k + (z-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k+1} (z-x)^n \right) \\ &= (z-x)^k (a_k + \varepsilon(z-x)) \end{aligned}$$

au voisinage de  $x$ , où  $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

Comme  $a_k \neq 0$ , pour  $r > 0$  suffisamment petit,  $a_k + \varepsilon(z-x) \neq 0$  pour  $|z-x| < r$ . Par conséquent, sur le disque ouvert  $D(x, r) = \{|z-x| < r\}$ , la fonction  $f$  s'annule uniquement en  $x$ . Cela revient à dire que  $x$  est un point isolé de  $Z$ .

Par ailleurs,  $Z = f^{-1}(\{0\})$  est fermé dans  $U$  car  $f$  est continue et  $\{0\}$  est fermé dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 8.** Développer en série entière les fonctions suivantes:

(a)  $\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} x^{2n}.$

(b)  $\frac{1}{a-x} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{a^{n+1}},$  avec  $a \neq 0$ .

(c)  $\ln(x+a) = \ln a + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a^n} x^n$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*.$

(d)  $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n.$

## 2 Intégrales

**Exercice 9.** Soit  $a \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $> -1$  et  $0 < r < R$ . On notera  $\Gamma$  le polygône orienté dont les sommets sont successivement  $r, R, R(1+a), r(1+a)$ . On désigne par  $\log$  la détermination principale du logarithme sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$

(a) Exprimer l'intégrale le long de  $\Gamma$  de  $f(z) = z^{-1}e^{-z}.$

(b) En déduire la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} (e^{-t} - e^{-(1+a)t}) t^{-1} dt = \log(1+a).$$

(c) En se ramenant à la question précédente par un changement de variable, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^a - 1}{\ln t} dt.$$

Solution :

(a)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_r^R t^{-1} e^{-t} dt + a \int_0^1 (1+at)^{-1} e^{-R(1+at)} dt - \int_r^R t^{-1} e^{-(1+a)t} dt - a \int_0^1 (1+at)^{-1} e^{-r(1+at)} dt = 0$$

(b) Il suffit de prendre la limite de l'égalité précédente pour  $r \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow \infty$ . On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+at)^{-1} e^{-r(1+at)} dt &\rightarrow \int_0^1 (1+at)^{-1} dt = \log(1+a) \\ \int_0^1 (1+at)^{-1} e^{-R(1+at)} dt &\rightarrow 0\end{aligned}$$

(c) La fonction  $\ln$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$ , donc on peut faire le changement de variables  $x = -\ln t$  dans l'intégrale. On obtient

$$\int_0^1 \frac{t^a - 1}{\ln t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - 1}{x} e^{-x} dx = -\log(1+a)$$

**Exercice 10.** Démontrer le théorème de Liouville en utilisant la formule de Cauchy à l'ordre 1, pour montrer que la dérivée d'une fonction entière bornée est identiquement nulle.

Solution : Soient  $f$  une fonction entière et  $a \in \mathbb{C}$ .

D'après la formule de Cauchy, pour tout  $r > 0$ , on a

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-a|=r} |f(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

En prenant la limite  $r \rightarrow 0$ , on trouve que  $f'(a) = 0$ . Finalement,  $f'$  est identiquement nulle, donc  $f$  est constante.

**Exercice 11.** (a) Soient  $R > 0$ ,  $D_R = D(0, R)$  et  $f \in \mathcal{O}(D_R, \mathbb{C}^*)$ . En appliquant la formule de Cauchy à une détermination de  $\log f$  sur  $D_R$ , montrer que pour tout  $r \in ]0, R[$ :

$$\log |f(0)| = \int_0^1 \log |f(re^{2i\pi\theta})| d\theta.$$

(b) En appliquant le résultat précédent à  $f(z) = (1-z)/(2i)$  avec  $R < 1$ , montrer que

$$\int_0^1 \log(\pi t) dt = -\log 2.$$

Solution :

(a) La fonction holomorphe  $f$  ne s'annule pas sur  $D_R$ , donc il existe une détermination de  $\log f$ , holomorphe sur  $D_R$ . Soit  $0 < r < R$ . On a alors

$$\begin{aligned}\log |f| &= \Re(\log f) = \Re \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_r} \log f(z) \frac{dz}{z} \right) \\ &= \Re \left( \int_0^1 \log f(re^{2i\pi\theta}) d\theta \right) \\ &= \int_0^1 \log |f(re^{2i\pi\theta})| d\theta\end{aligned}$$

**Exercice 12.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé  $\bar{D}(0, 1)$ . En calculant les intégrales

$$\int_{C(0,1)} (2 + z + 1/z) \frac{f(z)}{z} dz, \quad \int_{C(0,1)} (2 - z - 1/z) \frac{f(z)}{z} dz,$$

montrer les formules

$$\int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) \cos^2(\pi\theta) d\theta = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(0)}{4}, \quad \int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) \sin^2(\pi\theta) d\theta = \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{4}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \int_{C(0,1)} (2 + z + 1/z) \frac{f(z)}{z} dz &= 2 \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz + \int_{C(0,1)} f(z) dz + \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z^2} dz \\ &= 4i\pi f(0) + 0 + 2i\pi f'(0) \end{aligned}$$

$$\int_{C(0,1)} (2 - z - 1/z) \frac{f(z)}{z} dz = 4i\pi f(0) - 2i\pi f'(0).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{C(0,1)} (2 + z + 1/z) \frac{f(z)}{z} dz &= 2i\pi \int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) (2 + e^{2i\pi\theta} + e^{-2i\pi\theta}) d\theta \\ &= 4i\pi \int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) (1 + \cos(2\pi\theta)) d\theta \\ &= 8i\pi \int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) \cos^2(\pi\theta) d\theta \end{aligned}$$

En identifiant les égalités, on obtient bien

$$\int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) \cos^2(\pi\theta) d\theta = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(0)}{4}.$$

Le même genre de calculs permet de montrer que

$$\int_0^1 f(e^{2i\pi\theta}) \sin^2(\pi\theta) d\theta = \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{4}.$$

**Exercice 13.** Montrer qu'une fonction entière de partie réelle *majorée* est constante.

Solution : Il faut considérer la fonction holomorphe  $\exp(f)$ . En effet,  $|\exp(f)| = \exp(\Re f)$ .

**Exercice 14.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert non vide connexe, et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe non constante. On suppose que  $|f|$  admet un minimum local en un point  $z_0 \in U$ . Montrer que  $f(z_0) = 0$ .

Solution : Si  $|f(z_0)| > 0$ , alors la fonction  $f$  ne s'annule pas. La fonction  $1/f$  est holomorphe et bornée sur  $U$ , donc constante : absurde. Ainsi  $f(z_0) = 0$ .

**Exercice 15.** (a) Calculer, pour  $|z| \neq 1$ ,

$$\int_{C(0,1)} \frac{\zeta^{10}}{(\zeta - z)^9} d\zeta.$$

*Indication :* distinguer les cas  $|z| < 1$  et  $|z| > 1$

(b) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$  contenant le disque unité fermé  $\bar{D}(0, 1)$ . Calculer pour  $z \in U, |z| \neq 1$ ,

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{zg(\zeta)}{z\zeta - 1} \right) d\zeta.$$

*Indication :* ramenez-vous à deux intégrales calculables soit avec le théorème de Cauchy, soit avec la formule intégrale de Cauchy.

- (c) Soient  $f$  holomorphe sur un ouvert  $U$  contenant le disque unité fermé,  $a \neq b \in D(0, 1)$ . Montrer que

$$K = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Que pouvez-vous dire de la limite  $a \rightarrow b$  ? *Indication : décomposez.*

Solution :

- (a) Si  $|z| > 1$ , la fonction  $\zeta \mapsto \frac{\zeta^{10}}{(\zeta - z)^9}$  est holomorphe au voisinage du disque unité fermé, donc son intégrale sur  $C(0, 1)$  est nulle.

Si  $|z| < 1$ , en posant  $f(\zeta) = \zeta^{10}$ , la formule de Cauchy donne

$$\int_{C(0,1)} \frac{\zeta^{10}}{(\zeta - z)^9} d\zeta = \frac{2i\pi}{8!} f^{(8)}(z) = 2i\pi \binom{10}{8} z^2.$$

- (b) Si  $|z| < 1$ , la fonction  $\zeta \mapsto \frac{zg(\zeta)}{z\zeta - 1}$  est holomorphe au voisinage du disque unité fermé, donc son intégrale est nulle. Ainsi,

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = f(z).$$

Si  $|z| > 1$ , la fonction  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  est holomorphe au voisinage du disque unité fermé, donc son intégrale est nulle. Ainsi,

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z^{-1}} d\zeta = g(z^{-1}).$$

- (c) Pour tout  $z \neq a, b$ , on a

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right).$$

Donc

$$K = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{1}{a-b} \left( \frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b} \right) dz = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

Lorsque  $a \rightarrow b$ , cette quantité tend vers  $f'(b) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{(z-b)^2} dz$ .