

Partiel 2 du 10 janvier

- Aucun document autorisé.
- On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.
- Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Les (★) désignent les questions les plus difficiles.
- Vous trouverez un formulaire sur la transformée de Fourier en fin de sujet. Vous avez obligation d'utiliser la définition du cours.

Exercice 1. On définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ n^2 & \text{si } -\frac{1}{n} < x < 0 \\ -n^2 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

- (1) Déterminez sa transformée de Fourier $\hat{f}_n$.
- (2) Déterminez sa limite simple lorsque $n \rightarrow +\infty$. Cette limite simple est-elle la transformée de Fourier d'une fonction L^1 ?

Exercice 2. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $T : H \rightarrow H$ une application linéaire : on ne suppose pas qu'elle est continue. On suppose qu'il existe $U : H \rightarrow H$ linéaire telle que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle \text{ pour tous } x, y \in H.$$

A l'aide du Théorème de Banach-Steinhaus, montrez que T est continue.

Indication : On pourra poser $\phi_x(y) := \langle T(x), y \rangle$ pour $x \in H$ et $y \in H$.

1. PROBLÈME 1 : MINIMISATION SANS CONTINUITÉ FAIBLE

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Le but de ce problème est de trouver un minimiseur de

$$J(x) := \frac{\|x\|^2 + B(x, x)}{m(x)^2} \text{ pour tout } x \in H - \{0\}$$

où **Hypothèses sur m :** $m : H \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

- $m(x) > 0$ pour tout $x \in H - \{0\}$,
- $m(kx) = |k| \cdot m(x)$ pour tout $x \in H$
- Il existe $c_0 > 0$ tel que $m(x) \leq c_0 \|x\|$ pour tout $x \in H$.

Hypothèses sur B : $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

- B est bilinéaire continue,
- Il existe $C > 0$ tel que $|B(x, x)| \leq C m(x)^2$

Dans le Devoir 6, vous avez montré l'existence d'un minimiseur dans le cas $B \equiv 0$ et m satisfait une hypothèse de "continuité faible". Ici, on va supposer que :

$$\text{Si } (z_n) \rightharpoonup 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} B(z_n, z_n) = 0. \quad (SC)$$

$$\exists q > 2 \text{ tel que si } (z_n) \rightharpoonup 0, \text{ alors } m(z_n + z)^q = m(z)^q + m(z_n)^q + o(1). \quad (BL)$$

1. Montrez que $\lambda := \inf\{J(x) / x \in H \setminus \{0\}\}$ existe.
2. Montrez qu'il existe une suite minimisante $(x_n)_n \in H$ telle que $m(x_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \lambda$.
3. Montrez que (x_n) est bornée et déduisez-en l'existence d'une sous-suite $(x_{j(n)})_n$ qui converge faiblement vers $x \in H$. On note alors $\theta_n := x_{j(n)} - x$
4. On suppose dans cette question seulement que

$$\text{Si } (y_n) \rightharpoonup y, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} m(y_n) = m(y). \quad (CF)$$

- 4.1. Montrez alors qu'il existe une suite (t_n) telle que $t_n \geq 0$ pour tout n et

$$J(x_{j(n)}) = J(x) + t_n + o(1) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

- 4.2. Déduisez-en que $J(x) = \lambda$ et que donc l'infimum est atteint.

Dorénavant, on suppose que, avec c_0 comme dans la définition de m :

$$\lambda < \frac{1}{c_0^2} \quad (TA)$$

5. On va montrer que $x \neq 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $x = 0$

- 5.1. En utilisant (SC), montrez que $J(x_{j(n)}) \geq \frac{1}{c_0^2} + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

- 5.2. Déduisez-en une contradiction avec (TA). Ainsi $x \neq 0$

6. On se donne $0 < \alpha < 1$. Montrez que $(X + Y)^\alpha \leq X^\alpha + Y^\alpha$ pour tous $X, Y \geq 0$.

7. Montrez que

$$1 \leq m(x)^2 + m(\theta_n)^2 + o(1) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (BLbis)$$

- 8.(*) Montrez que

$$J(x_{j(n)}) \geq \|\theta_n\|^2 + J(x)(1 - m(\theta_n)^2) + o(1)$$

- 9.(*) En utilisant l'inégalité précédente, la définition de λ et l'hypothèse (TA), montrez que $\theta_n \rightarrow 0$ fortement.

10. Montrez que $J(x) = \lambda$.

2. PROBLÈME 2 : UNE EDO DU SECOND ORDRE SANS ELLIPTICITÉ

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f \in C^0(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Pour $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on s'intéresse à l'existence d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de

$$\begin{cases} -u'' + au = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0. \end{cases} \quad (E)$$

Lorsque $a = 1$, l'existence a été prouvée en cours et elle se généralise au cas $a > 0$. Pour traiter le cas $a \neq 0$, on va introduire une perturbation : pour $\epsilon > 0$, on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \epsilon u' + au = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0. \end{cases} \quad (E_\epsilon)$$

- (1) En utilisant la transformée de Fourier, montrez l'existence de $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est solution de (E_ϵ) .
- (2) On suppose $a > 0$. Montrez que pour $\epsilon > 0$ assez petit, la solution u de (E_ϵ) est unique.

On suppose dorénavant que $a = -\alpha < 0$ avec $\alpha > 0$. Pour $n \geq 1$, on note u_n la solution de $(E_{1/n})$ obtenue par transformation de Fourier. On va chercher à faire converger (u_n) vers une solution de (E)

- (3) (*) Montrez que si $\hat{f}(\pm\sqrt{\alpha}) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$ existe. On la note $u(x)$.
- (4) (*) On suppose toujours que $\hat{f}(\pm\sqrt{\alpha}) = 0$. Montrez que $(u_n), (u'_n), (u''_n)$ convergent uniformément et que $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E) .
- (5) (*) Traduisez $\hat{f}(\sqrt{\alpha}) = \hat{f}(-\sqrt{\alpha}) = 0$ en une hypothèse sur des intégrales de f . Déduisez-en un théorème d'existence de solutions de (E) .

3. FORMULAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque cela fait sens, on définit sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sous réserve des bonnes hypothèses, on a alors

- (1) $\widehat{f(x-a)} = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ pour $a, \xi \in \mathbb{R}$;
- (2) $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$;
- (3) $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$
- (4) $\left(\widehat{f}\right)' = -i\xi \widehat{xf(x)}$
- (5) Pour $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \phi \hat{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} \psi dx$

Important/Attention : ce formulaire ne comporte pas ou peu d'hypothèse. C'est volontaire, à vous de les écrire correctement si vous avez besoin des formules.

FIN

TSVP

4. QUELQUES REMARQUES CULTURELLES (À LIRE APRES L'EXAMEN)

- Le problème 1 est des adaptations d'une méthode variationnelle très souvent utilisée pour trouver des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques.
- Dans le Devoir 6, la particularité est que la fonction m est continue pour la topologie faible. C'est une hypothèse forte, beaucoup trop forte, et qui ne s'applique pas aux problèmes les plus intéressants.
- Le problème 1, l'hypothèse (BL) permet de quantifier ce qui manque pour avoir la continuité faible : c'est une hypothèse très standard qui est vérifiée dans de nombreuses situations (voir justement Brézis-Lieb (BL)). Du coup, on prouve un résultat de quantification : si une suite minimisante est en dessous d'un certain seuil (ici c_0^{-2}), alors elle converge fortement. La méthode ci-dessus a été initiée par Trudinger en 1968, et revisitée par Aubin en 1976 (d'où (TA)).
- Il reste alors à trouver des situations dans lesquelles $\lambda < \frac{1}{c_0^2}$. Pour cela, on joue sur le terme "sous-critique" (SC) $B(x, x)$.