

A. DEFINITION D'UN FILTRE

Ce sont des circuits qui modifient les « signaux » (électriques dans notre cas) suivant leur fréquence.

Ce sont donc des dispositifs de traitement du signal : ils peuvent être extrêmement simple ou bien très élaborés, analogique ou numérique. On les retrouve bien sur dans toute l'électronique moderne (audio, compression et lecteurs mp3, téléphone fixe et portable, ADSL...

Remarque : en électronique, telle que pratiquée en TP, on travaille avec de faibles puissances (composants ¼ W) donc de faibles courants et donc les filtres vont agir sur l'amplitude en tension et nous ferons donc des **calculs et des mesures de tension, en fonction des variables fréquences et temps.**

Un filtre modifie de façon irréversible les « signaux » qui lui sont appliqués : on peut donc définir une grandeur d'entrée [$v_e(t)$] et une grandeur de sortie [$v_s(t)$]. On supposera, sauf indication contraire, qu'il s'agit d'éléments linéaires, ce qui facilitera leur modélisation.

Classement. On aime bien faire des classements, et pour les filtres cela donne :

Classement par fonctionnalité :

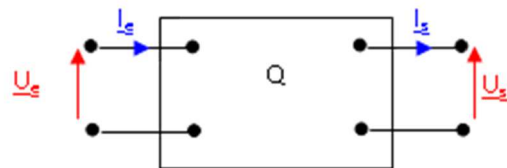
- Passe haut
- Passe bas
- Passe bande
- Réjecteur (de bande)

Mais aussi filtres actif / filtre passif et filtres du 1^{er} ordre/ du 2nd ordre,....

B. FONCTION DE TRANSFERT

On représente les filtres sous forme de quadripôle (étymologiquement : bête à quatre pattes) ou quadripôles.

On dispose d'une « boîte noire » dont le fonctionnement sera modélisé par sa fonction de transfert.



$$\underline{H}(j\omega_c) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

$$v_s(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad v_s(t) = V_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)}$$

$\underline{V}_s$ est l'amplitude complexe de la tension de sortie telle que $\underline{V}_s = V_0 e^{j\varphi}$
 $\underline{V}_e$ est l'amplitude complexe de la tension d'entrée telle que $\underline{V}_e = V_0$ (référence des phases prise sur la tension d'entrée).

Dans la « boîte noire », on retrouvera les éléments (R, L, C,...) qui constituent le filtre.

$\underline{H}(j\omega_c)$ est une fonction complexe de la variable ω . On représente classiquement comme un rapport de deux polynômes de même ordre. Le degré du polynôme au dénominateur détermine l'ordre du filtre. **Plus l'ordre du filtre est élevé, plus la transition entre fréquences atténuées et fréquences transmises est « rapide ».**

Un filtre est fabriqué à partir de composants électroniques réels (en analogique, R, C, L, AOp,...), modélisé par sa fonction de transfert et on va utiliser des éléments de représentation afin de le caractériser / le comparer / l'évaluer. C'est le très célèbre « diagramme de Bode »¹ qui est utilisé pour représenter la fonction de transfert d'un filtre et des quadripôles plus généralement.

[cf TD]

C. FREQUENCE DE COUPURE

C'est la fréquence pour laquelle la puissance transmise par le filtre (le quadripôle) est réduite de moitié. Dans ce cas :

- Le gain en tension est $G_V = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$
- Le gain en dB est $g_{dB} = 20 \log_{10} G_{\max} - 3dB$

On peut trouver plusieurs fréquences de coupure (cas des filtres passes bande ou réjecteurs).

D. LE DIAGRAMME DE BODE EN DIX ETAPES

Pour établir un diagramme de Bode complet, suivre ces 10 étapes :

1. Faire un schéma (adapté) du circuit (filtre)
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert, $\underline{H}(j\omega)$
3. Déterminer l'expression du module de $|\underline{H}(j\omega)|$
4. Déterminer l'expression de la phase $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$
5. Déterminer l'expression du gain en dB, $g_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$
6. Trouver la(les) valeur(s) de la fréquence de coupure.
7. Faire un tableau de variation. Le compléter avec les comportements asymptotiques de G_V , g_{dB} , $\text{tg}\varphi$, φ lorsque $f \rightarrow 0$, ∞ , puis $f = f_{\text{coupure}}$
8. Tracer le graphe $g_{dB} = \omega$ ou f_{qc} , dans une représentation $\frac{1}{2} \log$
9. Tracer le graphe $\varphi = \omega$ ou f_{qc} , dans une représentation $\frac{1}{2} \log$
10. Placer sur le graphe la(les) valeur(s) de la fréquence de coupure.

E. BEL, DECIBEL² ET LEUR USAGE

Initialement, les électriciens mesuraient l'atténuation d'un signal électrique dans un câble de téléphone (le « msc » 1 miles à 800Hz, vers 1920) avec une unité ad-hoc. Les ingénieurs des Laboratoires Bell proposèrent alors de définir une unité de transmission indépendante du câble et de la fréquence, variant en $\log_{10}$ et qui fut nommée un peu plus tard le Bell (en référence à Graham BELL). Son sous multiple est le décibel : $10 \log_{10}$. Noté dB. Ce ne sont pas des unités du SI.

¹ http://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Bode

² <http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9cibel>

En pratique on utilise le Bell ou le décibel pour caractériser l'évolution du rapport de deux puissances $[P]$ (ou deux énergies) ou de deux grandeurs de champ $[\sqrt{P}]$:

- Puissance (P) : $P_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$ où P_0 est la puissance de référence
- grandeur de champ ($A \sim \sqrt{P}$) : $A_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$ en électronique *c'est la tension électrique qui sera la grandeur de champ « pertinente »*. En acoustique ce sera la pression dans le fluide.

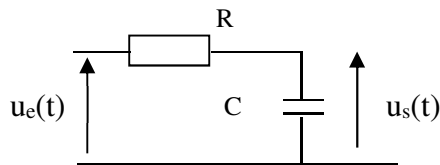
Le grand succès de cette unité, le dB, se retrouve en acoustique (cf loi de Fechner et psychoacoustique). 0 dB correspond à un son presque inaudible ($2 \cdot 10^{-5}$ Pa), et 120 dB correspondent au seuil de douleur (~ 20 Pa).

Pour revenir aux tensions et aux filtres, on gardera en mémoire que diviser une tension par :

- 2 revient à une atténuation de -6 dB
- 10 revient à une atténuation de -20 dB.

II. EXEMPLE : FILTRE R-C

Filtre RC



Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{u_s(t)}{u_e(t)}$$

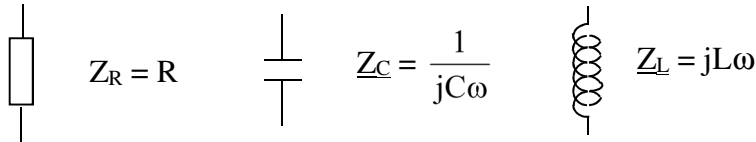
$$u_s(t) = U_s e^{j(\omega t + \varphi_s)} \quad u_e(t) = U_e e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

$$H(j\omega) = \frac{U_s e^{j\varphi_s} e^{j\omega t}}{U_e e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}} = \frac{U_s}{U_e} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = \frac{U_s}{U_e} e^{j\varphi} \quad \text{avec } \varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{U_s}{U_e} \right| \text{ est le module de la fonction de transfert } H(j\omega) \text{ et } \varphi \text{ en est l'argument.}$$

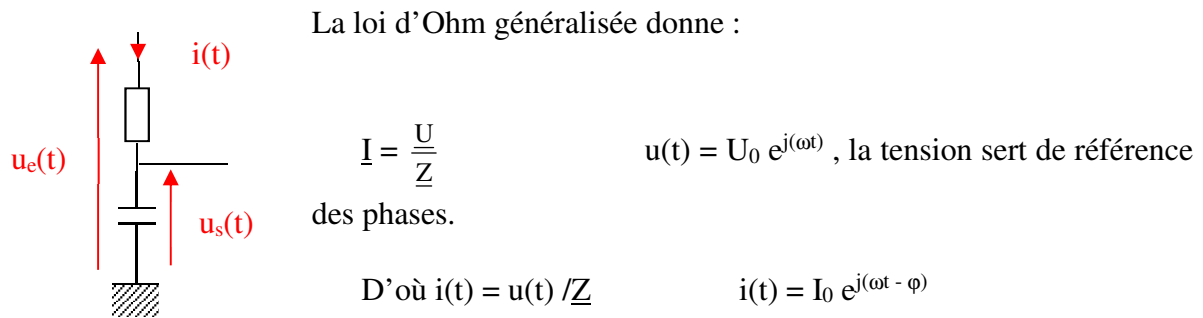
On cherche en général à connaître l'expression de la fonction de transfert, $H(j\omega)$, en fonction des composants du circuit (R et C, dans l'exemple) et donc en fonction des impédances complexes.

Rappel :



Application de la « méthode en 10 points » :

1. Refaire le schéma sous une forme simplifiée (« totem pole », par exemple)



$$u_e(t) = \underline{Z}_e i(t) \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_e = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \underline{U}_e = \underline{Z}_e \underline{I}$$

$$u_s(t) = \underline{Z}_s i(t) \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_s = \underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega} \quad \underline{U}_s = \underline{Z}_c \underline{I}$$

2. Expression de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$

3. Expression du module de H :

Rappel : $|\underline{H}| = \sqrt{\underline{H} \underline{H}^*}$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$|\underline{H}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4. Expression de la phase φ

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}) \quad \text{tel que} \quad \text{tg} \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})}$$

On cherche maintenant à écrire $\underline{H}$ comme la somme de sa partie réelle plus j fois sa partie imaginaire :

$$\underline{H}(j\omega) = \text{Re}(\underline{H}) + j \text{Im}(\underline{H})$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1+jx} \quad \underline{H}(jx) = \frac{1-jx}{1+x^2} \quad \text{Re}(\underline{H}) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Im}(\underline{H}) = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})} = -x = -\frac{\omega}{\omega_0} = -RC\omega$$

Remarque : On voit que φ et $|\underline{H}|$ sont des fonctions de la pulsation ω

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}| e^{j\varphi} = \frac{U_s}{U_e} e^{j\varphi} \quad \text{comme } \text{tg}\varphi \text{ est } < 0 \Rightarrow \varphi < 0 \text{ donc } u_s \text{ est en retard par rapport à } u_e.$$

On pourra reprendre la représentation polaire (i.e. angulaire) pour donner les positions relatives des vecteurs u_e et u_s .

5. Expression du gain en dB

$$g_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}} = -20 \log(1+x)$$

6. Fréquence de coupure : pour $x = 1$, $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. Tableau de variation :

f	0	f_0	∞
ω	0	ω_0	∞
x	0	1	∞
$G_v = \underline{H} $	+1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
g_{dB}	0	-3dB	$-\infty$
tg φ	0	-1	$-\infty$
φ	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$

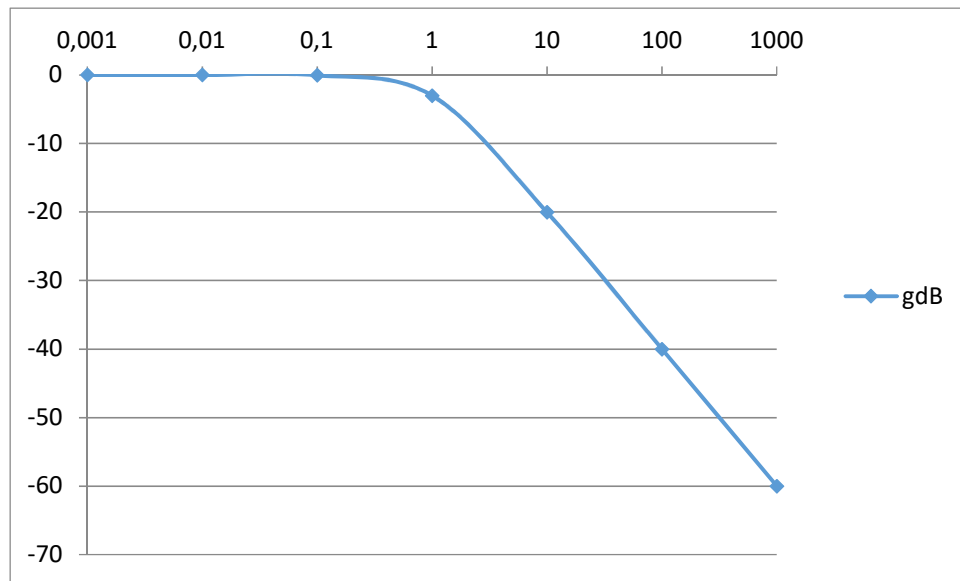
Asymptotes :

Si $f=0$ $\omega=0$ $x=0$ $G_v = |\underline{H}(jx)| \rightarrow 1$ $g_{dB} \rightarrow 0$

Si $f=\infty$ $\omega=\infty$ $x=\infty$ $G_v = |\underline{H}(jx)| \rightarrow \frac{1}{x}$ $g_{dB} \sim -20\log(x)$ pour $x \rightarrow 10x$

$g_{dB} \sim -20\log(x) - 20$ on trouve donc une pente de -20dB par décade pour les hautes fréquences (HF)

8. Graphes : $g_{dB} = f(x)$ représentation semi-log



9. Graphe : $\varphi = f(x)$ représentation semi-log