

Corrigé du TD1 : Nombres complexes

1. CALCULS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1 - i)(3 + 4i), (1 + 2i)^3, (3 - i)(2 + i) + i - 7.$$

Corrigé : $(1 - i)(3 + 4i) = 7 + i$, $(1 + 2i)^3 = -11 - 2i$, $(3 - i)(2 + i) + i - 7 = 2i$.

Exercice 2. Déterminez le module des complexes suivants :

$$2, 2i, 3 + 4i, (1 + i)(2 + i).$$

Corrigé : $|2| = 2$, $|2i| = \sqrt{(2i)\overline{2i}} = \sqrt{4 \times i \times (-i)} = \sqrt{4} = 2$, $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $|(1 + i)(2 + i)| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$.

Exercice 3. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, montrez que $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

Corrigé : On écrit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a donc

$$z \cdot z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

et donc

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} \\ &= \sqrt{a^2(a')^2 + b^2(b')^2 - 2aa'bb' + a^2(b')^2 + (a')^2b^2 + 2aa'bb'} \\ &= \sqrt{a^2(a')^2 + b^2(b')^2 + a^2(b')^2 + (a')^2b^2} \end{aligned}$$

Indépendamment, on a

$$\begin{aligned} |z| \cdot |z'| &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)((a')^2 + (b')^2)} \\ &= \sqrt{a^2(a')^2 + b^2(b')^2 + a^2(b')^2 + (a')^2b^2} \end{aligned}$$

et on a bien $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Montrez que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ et que $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$.

Corrigé : $|z|^2 = z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, puis $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si $|z| = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$, or $a^2, b^2 \geq 0$, donc $a^2 = b^2 = 0$, puis $a = b = 0$, donc $z = 0 + i \times 0 = 0$

Exemple : $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Exercice 5. Mettez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+i}, \frac{1}{i}, \frac{i+1}{i}, \frac{2+3i}{3+5i}(1-i).$$

Corrigé :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}, \quad \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\frac{i+1}{i} = \frac{(i+1)i}{i^2} = \frac{-1+i}{-1} = 1-i$$

$$\frac{2+3i}{3+5i}(1-i) = \frac{(2+3i)(3-5i)}{3^2+5^2}(1-i) = \frac{(21-i)(1-i)}{34} = \frac{20-22i}{34} = \frac{10-11i}{17}$$

Exercice 6. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, montrez que $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

Corrigé : Pour $z = a + ib$ avec a, b non tous nuls, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

Et donc

$$\left| \frac{1}{z} \right|^2 = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2} \right)^2 = \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{|z|^2}$$

Et donc $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

2. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET RACINES CARRÉES

Exercice 7. Déterminez les solutions complexes des équations suivantes :

$$z^2 + 2 = 0, \quad z^2 + 2z + 2 = 0; \quad z^2 + 6z + 13 = 0.$$

Corrigé :

- $z^2 + 2 = 0$. On a $\Delta = 0^2 - 4 \times 2 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$. Les deux racines sont donc

$$z_1 = \frac{0 - 2i\sqrt{2}}{2} = -i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = \frac{0 + 2i\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$$

- $z^2 + 2z + 2 = 0$. On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Les deux racines sont donc

$$z_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \text{ et } z_2 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

- $z^2 + 6z + 13 = 0$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = (4i)^2$. Les deux racines sont donc

$$z_1 = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{-6 + 4i}{2} = -3 + 2i$$