

TD4 : Equations différentielles à coefficients constants

1. EQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE

Exercice 1. Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = 3y, \quad 2y' + 3y = 0, \quad 4\dot{x} + x = 0; \quad y' = 0$$

$$\begin{aligned} &\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \right\} \\ &\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = 5y \\ y(1) = 2 \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \right\} \\ &\bullet \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \right\} \end{aligned}$$

Exercice 2. Effectuez la résolution des équations différentielles suivantes :

$$y'' + 4y = 0; \quad y'' - 4y = 0; \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Déterminez alors les solutions de chacune de ces équations telles que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 3 (Le ressort). **(a)** L'équation du mouvement linéaire d'un corps solide de masse $m > 0$ fixé à un ressort de caractéristique $k > 0$ est

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Déterminez les solutions de cette équation. Montrez que le mouvement est périodique et donnez sa période.

(b) On ajoute un terme d'amortissement $\lambda > 0$ de sorte que l'équation devient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

Résolvez cette équation. Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 4 (Circuit RLC). Soient $L, C > 0$ et $R > 0$. Déterminez les solutions de l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$