

UN EXERCICE

On montre ici qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(]-1, 1[)$ telle que

$$\varphi(0) = \int_{-1}^1 f \varphi \, dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(]-1, 1[) \quad (E)$$

On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une telle fonction f . On se donne alors $\varphi \in C_c^1(]-1, 1[)$.

Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta(x) = 1$

(1) Donnez un exemple d'une telle fonction θ .

(2) On pose $\varphi_n(x) := \theta(nx)\varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f \varphi_n \, dx = \int_{-1}^1 f \varphi \, dx.$$

(3) En appliquant (E) à φ_n , $n \geq 1$, montrez que

$$\int_{-1}^1 f \varphi \, dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(]-1, 1[).$$

(4) Dédisez-en une contradiction.