

Partiel 2 du 13 janvier

- Aucun document autorisé.
- On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.
- Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Les (★) désignent les questions les plus difficiles.
- Vous trouverez un formulaire sur la transformée de Fourier en fin de sujets. Vous avez obligation d'utiliser la définition du cours.

Exercice 1. On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

- (1) Déterminez sa transformée de Fourier $\hat{f}$.
- (2) Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1 + \xi^2} \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On munit le produit $E \times F$ de la norme $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ pour $(x, y) \in E \times F$. Soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

- (1) En raisonnant comme dans la caractérisation de la continuité des applications linéaires continues, montrez que B est continue si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M\|x\|_E\|y\|_F$ pour tous $x \in E$ et $y \in F$.
- (2) En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus, montrez que B est continue si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B(x_0, \cdot) : F & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & B(x_0, y) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{lcl} B(\cdot, y_0) : E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & B(x, y_0) \end{array} \right\}$$

sont continues pour tous $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$.

1. PROBLÈME 1 : MINIMISATION AVEC UNE HYPOTHÈSE DE CONTINUITÉ FAIBLE

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $F \in C^1(H)$
- Il existe $p > 2$ et $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1\|z\|^p \leq F(z) \leq c_2\|z\|^p \text{ pour tout } z \in H.$$

$$J(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - F(x) \text{ pour tout } x \in H.$$

1. Montrez que $m := \sup\{J(x)/x \in H\}$ existe et que $0 \leq m$. On se donne alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite maximisante pour J , c'est-à-dire $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = m$.

2. Montrez qu'il existe $x \in H$ et une sous-suite, notée $(x_{j(n)})$, qui converge faiblement vers x .

On suppose que pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $z \in H$ tel que $z_n \rightharpoonup z$ (faiblement), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(z_n) = F(z). \quad (C_f)$$

3. On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe une suite (t_n) telle que $J(x_{j(n)}) = J(x) + t_n + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrez que $J(x) = m$.

5.(*) Montrez qu'il existe $\varphi : H \rightarrow H$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in H$, on a $dF_x(y) = \langle \varphi(x), y \rangle$. Ici, dF_x désigne la différentielle de F au point x .

6.(*) Déduisez-en que $x = \varphi(x)$.

2. PROBLÈME 2 : MINIMISATION AVEC UNE HYPOTHÈSE DE TYPE BRÉZIS-LIEB

On se place dans les hypothèses du début du problème précédent. A savoir,

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $F \in C^1(H)$
- Il existe $p > 2$ et $C > 0$ tels que

$$c_1 \|z\|^p \leq F(z) \leq c_2 \|z\|^p \text{ pour tout } z \in H.$$

On a déjà vu que $m = \sup J$ existe et qu'il existe une suite maximisante (x_n) et une sous-suite $x_{j(n)} \rightharpoonup x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (**On ne demande pas de redémontrer ces points**). On suppose maintenant que si $z_n \rightharpoonup z$, alors

$$F(z_n) = F(z) + F(z_n - z) + o(1) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (C_{bl})$$

On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$.

1. Montrez qu'il existe une suite (s_n) telle que $J(x_{j(n)}) = J(x) + s_n + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec s_n qui dépend de $\|\theta_n\|$ et $F(\theta_n)$.

2.(*) Montrez qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $\|\theta_n\| < \epsilon_0$, alors $\theta_n \rightarrow 0$ fortement et $J(x) = m$ (et donc le maximum est atteint).

3.(*) Montrez que si $\limsup_n \|x_n\| < \epsilon_0$, alors $J(x) = m$ est atteint.

3. PROBLÈME 2 : UNE EDO DU SECOND ORDRE

On se donne la fonction f définie dans l'exercice 1 : vous pourrez utiliser tous les résultats de cet exercice, même si vous ne les avez pas démontrés.

On s'intéresse à l'existence d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de

$$\begin{cases} -u'' + 5u' - 6u = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (E)$$

(1) Montrez l'existence de $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est solution de (E).

(2) Montrez que la solution u de (E), si elle existe, est unique.

- (3) Montrez qu'il existe une unique solution $v \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$ de

$$\begin{cases} -v'' + 5v' - 6v = f(x) & \text{pour tout } x \in [0, 1]; \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (E_d)$$

- (4) (★) Montrez que u est à valeurs réelles.
 (5) (★) Dans la méthode, quelle propriété vous empêche de montrer que u est C^3 ? Pourquoi n'a-t'on en fait pas $u \in C^3$?

4. FORMULAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque cela fait sens, on définit sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sous réserve des bonnes hypothèses, on a alors

- (1) $\widehat{f(x-a)} = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ pour $a, \xi \in \mathbb{R}$;
- (2) $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$;
- (3) $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$
- (4) $\widehat{(f')'} = -ix \widehat{f(x)}$
- (5) Pour $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \phi \hat{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} \psi dx$

Important/Attention : ce formulaire ne comporte pas ou peu d'hypothèse. C'est volontaire, à vous de les écrire correctement si vous avez besoin des formules.

FIN

5. QUELQUES REMARQUES CULTURELLES (À LIRE APRES L'EXAMEN)

- Les problèmes 1 et 2 sont des adaptations d'une méthode variationnelle très souvent utilisée pour trouver des solutions d'équations aux dérivées partielles qu'on peut écrire comme $x = \varphi(x)$.
- Dans le problème 1, la particularité est que le terme issu de φ (à avoir F) est continu pour la topologie faible (hypothèse (C_f)). C'est une hypothèse forte, beaucoup trop forte, et qui ne s'applique pas aux problèmes les plus intéressants.
- Le problème 2, l'hypothèse (C_{bl}) permet de quantifier ce qui manque pour avoir la continuité faible : c'est une hypothèse très standard qui est vérifiée dans de nombreuses situations (voir justement Brézis-Lieb). Du coup, on prouve un résultat de quantification : si une suite minimisante est en dessous d'un certain seuil (ici ϵ_0), alors elle converge fortement. La méthode ci-dessus a été initiée par Trudinger en 1968.
- La résolution du problème 3 est standard par la Transformée de Fourier. En prime, elle donne l'existence de solutions de (E_d) , à savoir un problème de type Dirichlet. Ceci dit, un tel résultat peut s'obtenir par le théorème de Cauchy-Lipschitz.