

TD3 : écrasement d'un pneu plein

Objectif #1

Différencier les notions de ligne de courant et de trajectoire.

Objectif #2

Comparer les formalismes lagrangiens et eulériens.

Objectif #3

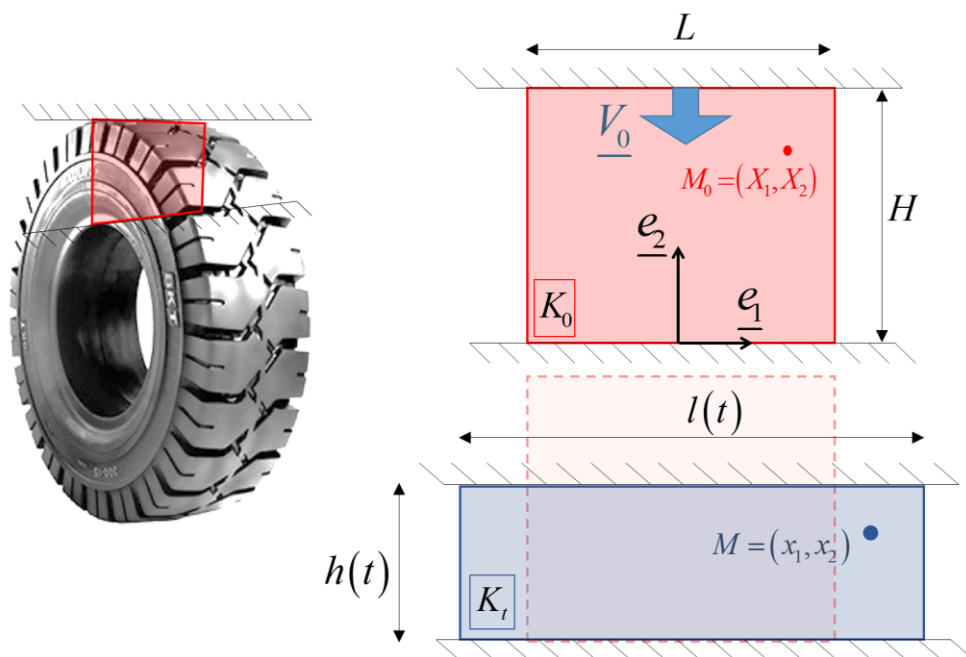
Manipuler les notations indicielles, matricielles et tensorielles.

Objectif #4

Calculer le gradient de la transformation et le tenseur des déformations.

Enoncé du problème

On considère un pneu plein en caoutchouc, dont la section peut être approximée par un rectangle de largeur et hauteur initiales L et H respectivement. Pour approcher le phénomène d'écrasement du pneu, qui apparaît dans le calcul du rendement d'un véhicule, on considère **un problème plan** dans lequel la jante est rigide et indéformable, tandis que le sol « s'approche » avec une vitesse $\underline{V}_0 = -V_0 \underline{e}_2$ maintenue constante.



Problème posé

On veut suivre la cinématique de la transformation de ce milieu continu et calculer les déformations pour déterminer si elles sont compatibles avec les propriétés du caoutchouc.

Hypothèses

- On considère que le caoutchouc qui constitue le pneu plein est **incompressible**
- On considérera que les contacts s'effectuent **sans frottement** et que la section du pneu reste **rectangulaire** lors de la transformation

Questions

- 1) Déterminer le champ de vitesses dans la configuration K_t .

Aide : en s'avancant sur les sections qui suivront, on admet que l'hypothèse d'incompressibilité du milieu implique la relation suivante sur le champ de vitesses :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

- 2) Donner l'équation des trajectoires d'un point se trouvant initialement en (X_1, X_2) .
- 3) Donner l'équation des lignes de courant.
- 4) Déterminer le champ de déplacements.
- 5) Calculer le tenseur gradient de la transformation. Effectuer ce calcul en utilisant les différentes notations indicielles, matricielles et tensorielles. Vérifier que la transformation s'effectue à volume constant.
- 6) Comparer le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Discuter des signes de leurs composantes. A quelle condition sont-ils équivalents ?
- 7) Avant rupture, on fait l'hypothèse que le caoutchouc qui constitue le pneu peut être « étiré » de 20% ou « comprimé » de 40%. D'écrire la condition de rupture associée.

Formules utiles

Trajectoires :

Définition en formulation lagrangienne : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

Définition en formulation eulérienne : $\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt$ avec la C.I. $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

Lignes de courant :

Ce sont les enveloppes des champs des vecteurs vitesses à un instant donné t :

$$\underline{dx} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0} \Rightarrow \frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$