

Partie B : Obtention du spectre visible d'une étoile.

$$s_1(M, t) = s_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(M, t) = s_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

φ_1 et φ_2 sont fonctions de la position du point M.

$$I_1(M) = k \langle s_1^2(M, t) \rangle_t = k s_{10}^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_1) dt \right]$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}$$

$$I_1(M) = \frac{1}{2} k s_{10}^2 ; \quad I_2(M) = \frac{1}{2} k s_{20}^2$$

$$I(M) = k \langle s(M, t) \rangle^2 \quad \text{avec} \quad s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2$$

$$2 s_1 s_2 = 2 s_{10} s_{20} \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

on pose $(a+b) = 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2$

$(a-b) = 0 + \varphi_2 - \varphi_1$

$$2 s_1 s_2 = s_{10} s_{20} \left\{ \cos[2\omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)] + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right\}$$

$$s^2 = s_1^2(M, t) + s_2^2(M, t) + s_{10} s_{20} [\quad]$$

avec $I_1(M) = k \langle s_1^2 \rangle_t$

$I_2(M) = k \langle s_2^2 \rangle_t$

$$I(M) = k \langle s^2 \rangle_t = k \langle s_1^2 + s_2^2 + s_{10} s_{20} [\quad] \rangle_t$$

$$= k \langle s_1^2 \rangle_t + k \langle s_2^2 \rangle_t + k s_{10} s_{20} \langle [\quad] \rangle_t$$

avec $I_1(M) = \frac{1}{2} k s_{10}^2 ; \quad I_2(M) = \frac{1}{2} k s_{20}^2$

$$s_{10}^2 s_{20}^2 = 4 k^2 I_1(M) I_2(M)$$

$$s_{10} s_{20} = 2k \sqrt{I_1 I_2}$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1 I_2} \langle [\quad] \rangle_t$$

$$\langle [\quad] \rangle_t = \langle \cos[2\omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)] \rangle_t + \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle_t \quad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\langle [\quad] \rangle_t = \langle \cos \varphi \rangle_t$$

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \langle \cos \varphi \rangle_t}$$

Partie B: Obtention du spectre visible d'une étoile

B.I Interférences à 2 ondes

$$s_1(M, t) = s_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(M, t) = s_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

φ_1 et φ_2 fu de la position du point M

Eclairement

$$I_1(M) = k \langle s_1^2(M, t) \rangle_t$$

$$I_2(M) = k \langle s_2^2(M, t) \rangle_t$$

$$\Delta(M) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

$$I(M) = k \langle \Delta^2(M, t) \rangle_t$$

Rappel:

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle_t =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

1.a: $I_1(M) = k \langle s_1^2(M, t) \rangle_t = k s_{10}^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi_1) \rangle_t$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x] \quad \text{et} \quad \langle \cos 2x \rangle_t = 0$$

$$I_1(M) = \frac{1}{2} k s_{10}^2$$

Intensité d'une source unique

et $I_2(M) = \frac{1}{2} k s_{20}^2$

$$\Delta(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

$$\Delta^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2$$

$$2s_1s_2 = 2s_{10}s_{20} \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$(a+b) = 2\omega t + (\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{et} \quad (a-b) = 0 + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= s_{10}s_{20} [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$\Delta^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_{10}s_{20} [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

avec $I_1(M) = k \langle s_1^2 \rangle_t$

$I_2(M) = k \langle s_2^2 \rangle_t$

$$I(M) = k \langle \Delta^2 \rangle_t = I_1(M) + I_2(M) + k s_{10}s_{20} \langle \cos \varphi \rangle_t$$

avec $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$I_1(M) \times I_2(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 s_{10}^2 s_{20}^2 \Rightarrow 2 \sqrt{I_1 I_2} = k s_{10}s_{20}$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \langle \cos \varphi \rangle_t$$

Intensité de 2 sources m d.

1.b: on observe des interférences lumineuses (et pas seulement en M!) si $\langle \cos \varphi \rangle_t = \cos \varphi$ cad φ est indépendant du temps.

BJ 1b (suite) : $\langle \cos \varphi \rangle_t = \cos \varphi$ φ indépendant du temps

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ la différence de phase entre les 2 ondes interférant en M ne dépend que de la position du point M (géométrique) et pas du temps : on dit que les sources sont cohérentes spatialement

1c : si les sources sont incohérentes, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ varie de façon aléatoire dans le temps, à la fréquence d'émission des "trains d'ondes" (cf. cohérence spatiale).

Donc $\langle \cos \varphi \rangle_t = 0$ et $\underline{I(M) = I_1(M) + I_2(M)}$ sources incohérentes

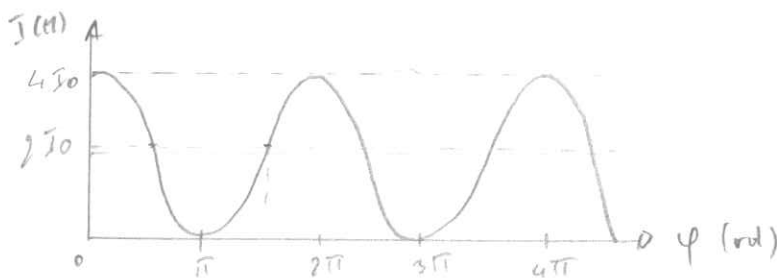
L'intensité est la même quelque soit la position du point M : c'est la somme des intensités "reçues", sans modulation.

présenter les sources : cohérence spatiale (émission synchronisée) - localisation des franges

1d : $I_1(M) = I_2(M) = I_0$

$$I(M) = 2I_0 + 2I_0 \cos \varphi = 2I_0 (1 + \cos \varphi)$$

$$-1 < \cos \varphi < +1 \Rightarrow 0 < I(M) < 4I_0$$



$$\varphi = 0 + p 2\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = +1 \Rightarrow I(M) = 4I_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = p 2\pi \end{array} \right.$$

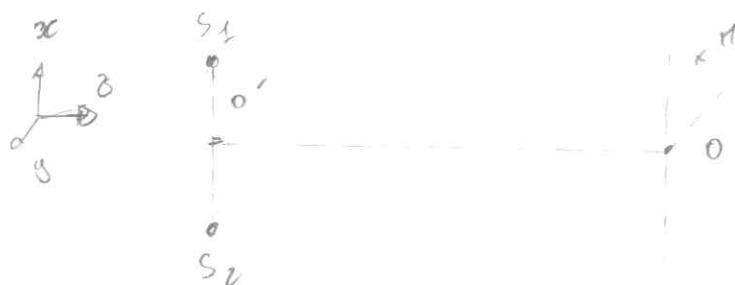
Modulation de l'intensité : figure d'interf.



B.I.2. (S_1, S_2) 2 sources mono λ

$$\overline{O'O} = D \quad ; \quad n = 1$$

$$\overline{S_1 S_2} = a \quad \quad \quad \overline{S_2 O'} : \overline{O' S_1}$$



analogie onde lumineuse $\equiv$ onde mica $\rightarrow$ notion interférences $\begin{cases} \text{destruct.} \\ \text{construct.} \end{cases}$

$\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$ (visible) $\Rightarrow$ variation de chemin de $\frac{\lambda}{2}$ permet d'observer des interférences $\begin{cases} \text{destr.} \\ \text{constr.} \end{cases}$

chemins optiques $\begin{cases} (S_1 M) = n \overline{S_1 M} \\ (S_2 M) = n \overline{S_2 M} \end{cases}$ dans l'air $n = 1$

On note δ (d.d.m), la différence de chemin optique

$$\boxed{\begin{aligned} \delta &= \overline{S_2 M} - \overline{S_1 M} \\ \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} \delta \end{aligned}}$$

La phase $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ associée à δ est:

Dans le référentiel donné, on trouve :

$$S_1 \begin{pmatrix} x - a/2 \\ y \\ +D \end{pmatrix} \quad S_2 \begin{pmatrix} x + a/2 \\ y \\ +D \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S_1 M} = [(x - a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2}$$

$$\overline{S_2 M} = [(x + a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2}$$

$$\delta = \overline{S_2 M} - \overline{S_1 M}$$

$$D \left[\frac{1}{D^2} (x^2 + \frac{a^2}{4} + ax + y^2 + D^2) \right]^{1/2}$$

Hypothèse : $D \gg$ autres dimensions (a, x, y).

$$\overline{S_2 M} = D \left[1 + \underbrace{\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{y^2}{D^2}}_{\text{2ème degré}} + \frac{ax}{D^2} \right]^{1/2}$$

∞^{at} petit

$$\overline{S_1 H} = D \left[1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{y^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} \right]^{1/2}$$

à petit 2^{ème} degré

$$\overline{S_2 H} = D/2 \left[(2 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}) + \frac{ax}{D^2} \right]$$

$$-\overline{S_2 H} = D/2 \left[-(2 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}) + \frac{ax}{D^2} \right]$$

D. L. $(1 + \epsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{2}(2 + \epsilon)$ au 1^{er} ordre

$\delta = \overline{S_2 H} - \overline{S_1 H} = \frac{ax}{D}$	$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}$
Différence de marche	Phase
$I(H) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right]$	

Modulation
d'intensité pour
deux sources
ponctuelles
(type Trou de Young)

lorsque x varie $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right)$ varie et $I(H)$ est modulée.

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax_p}{D} = p 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax_{p+1}}{D} = (p+1) 2\pi$$

$$p \in \mathbb{Z}$$

2 franges claires consécutives

$$i = x_{p+1} - x_p$$

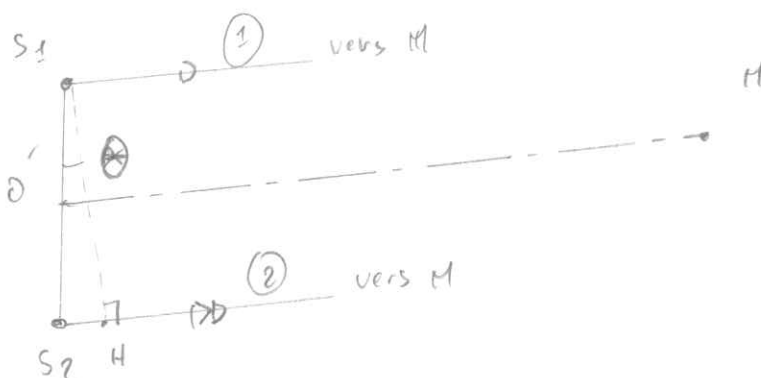
$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{a}$$

c'est l'expression de
l'interfrange

$$i = \lambda \frac{D}{a}$$

Interfrange

Autre méthode : géométrique



$$D \gg x, a \Rightarrow$$

$$[O'H] \parallel [S_1 H] \text{ et } [S_2 H]$$

H : projection $\perp$ de S_1
sur $[S_2 H]$

$$\delta = \overline{S_2 H} = a \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{D}$$

Pour les petits angles $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$ d'où

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Différence de marche

A.N. : mesure d'interfrange

$$i = \lambda \frac{D}{a}$$

$$\lambda \text{ laser He Ne} = 632,8 \text{ nm}$$

$$= 632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$D = 2 \text{ m} \quad \left(\begin{array}{l} \text{longueur} \\ \text{d'un banc} \\ \text{d'optique} \end{array} \right)$$

$$a = 2 \text{ mm} \\ = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

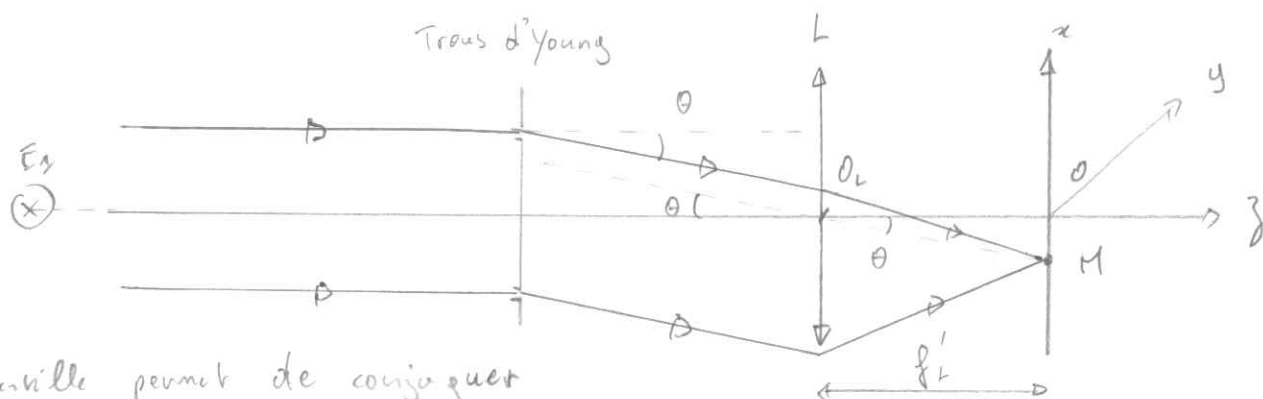
$$i = 632,8 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} = 632,8 \cdot 10^{-6} \\ \neq 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$10 i \neq 6,3 \text{ mm.}$$

2 exemples de dispositifs expérimentaux :

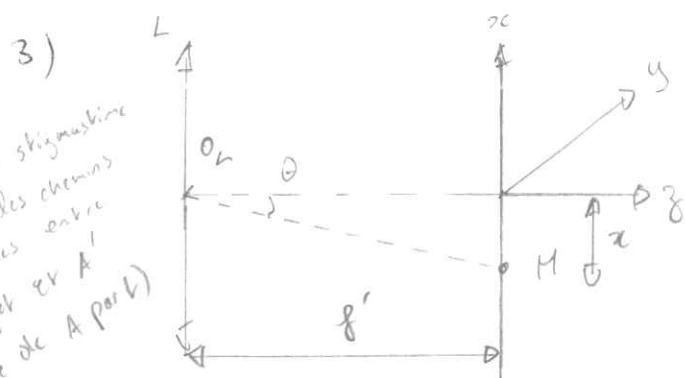
- Trous d'Young
- Miroirs de Fresnel.

B II Distance angulaire entre 2 composantes d'une étoile double



La lentille permet de conjuguer l'étoile avec le plan $(0, x, y)$

2) conditions de Gauss $\longleftrightarrow$ stigmatisme approché i.e. et les rayons passant par un point A objet passent par le point A' image (de A par L) -



s'il y a stigmatisme alors les chemins optiques entre A objet et A' (image de A par L) sont tous équivalents.

1 rayon passant par O_L (centre de la lentille L) n'est pas dévié

$$\tan \theta = \frac{x}{f'}$$

$x \rightarrow$ valeur algébrique

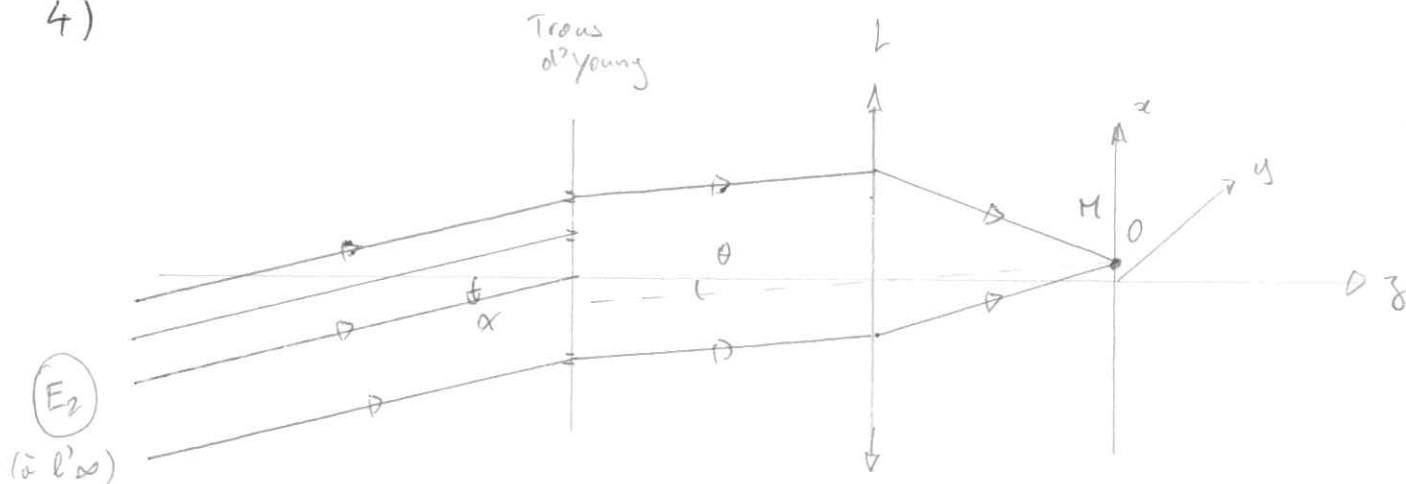
$$\delta = a \sin \theta \approx a \tan \theta = a \frac{x}{f'}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'}$$

Δ signe de x !

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right]$$

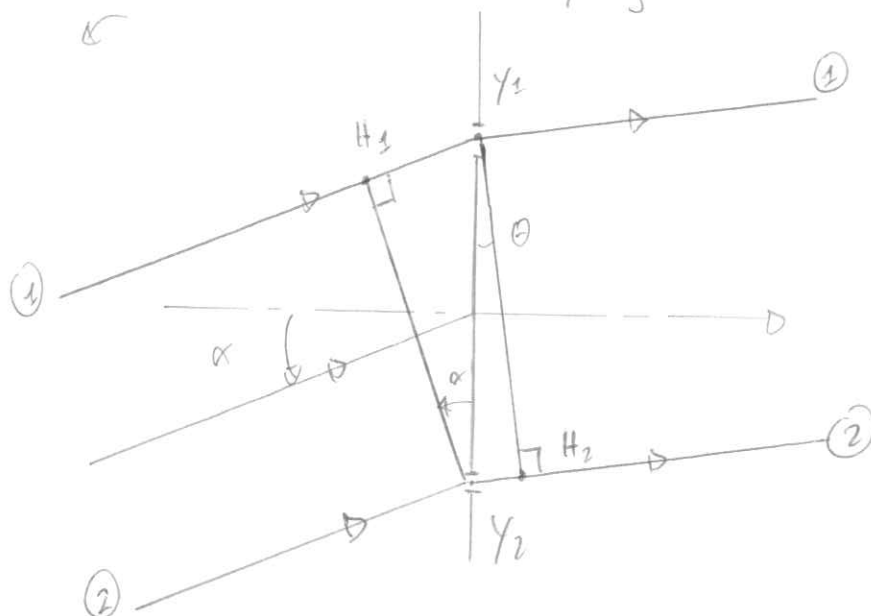
4)



E_2
(à l'_{∞})

$\alpha > 0$
 α

Trous d'Young



Avant les trous

$$\delta_1 = (H_1 Y_1) = n \overline{H_1 Y_1} = \overline{H_1 Y_1}$$

$$\text{avec } |\overline{Y_1 Y_2}| = a$$

$$\delta_1 = a \sin \alpha \approx a \alpha \text{ (rad)}$$

Après les trous

$$\delta_2 = (Y_2 H_2) = n \overline{Y_2 H_2} = \overline{Y_2 H_2}$$

$$\delta_2 = a \sin \theta \approx a \frac{\pi}{f'}$$

(cf § précédent)

Le rayon ① arrive en retard de δ_1 , sur les trous d'Young : on fait le choix de compter δ_1 négativement

Le rayon ① repart en avance de δ_2 , des T.Y. : on compte δ_2 positif^{ur}

$$\delta_{\text{total}} = -\delta_1 + \delta_2 = \frac{a\pi}{f'} - a\alpha = a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right)$$

$\alpha > 0$ si dans le sens trigo.

$$I_2(x) = 2 I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right) \right) \right]$$

Décalage de la figure d'interférence
 $x \rightarrow (x - a f')$

5) Etoile double Orionis :

E_1 et E_2 ont $\hat{m}$ éclat $\Rightarrow I_{10} = I_{20} = I_0$

$I(x) = I_1(x) + I_2(x)$ (les 2 sources sont incohérentes $\Rightarrow$ somme des intensités)

$$= 2 I_0 \left\{ \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a\pi}{f'} \right) \right] + \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right) \right) \right] \right\}$$

$$= 2 I_0 \left\{ 2 + \cos(p) + \cos(q) \right\} \quad \text{avec} \quad p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a\pi}{f'} \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$p+q = \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right)$$

$$I(x) = 4 I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} a \left(\frac{\pi}{f'} - \alpha \right) \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} a \alpha \right) \right\} \quad p-q = \frac{2\pi}{\lambda} a \alpha$$

B II (5) (suite) $I(M)$ varie avec la position x du point M sauf

lorsque $\cos\left(\pi \frac{a_1 x}{\lambda}\right) = 0$ i.e. $\pi \frac{a_1 x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$

$$a_1 = \frac{\lambda}{2x}$$

Pour cette valeur particulière de a_1 $I(M) = 4I_0 \quad \forall M$;
l'écran est uniformément éclairé.

A.N. $x = \frac{\lambda}{2a_1} \quad \lambda = 550 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad a_1 = 28,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$\alpha = 3,68 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \neq 10^{-6} \text{ rad}$

(soit $5,54 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$)
(soit $0,2''$ d'arc)

B III Fentes d'Young et influence de la diffraction

-1- Trous $\rightarrow$ fentes d'Young.

on observe des franges rectilignes // à $O'y$ - l'interfrange i ne change pas tout que le pas a reste constant.

Par contre la diffraction par 1 trou circulaire $\neq$ fente rectiligne

-2- Diffraction

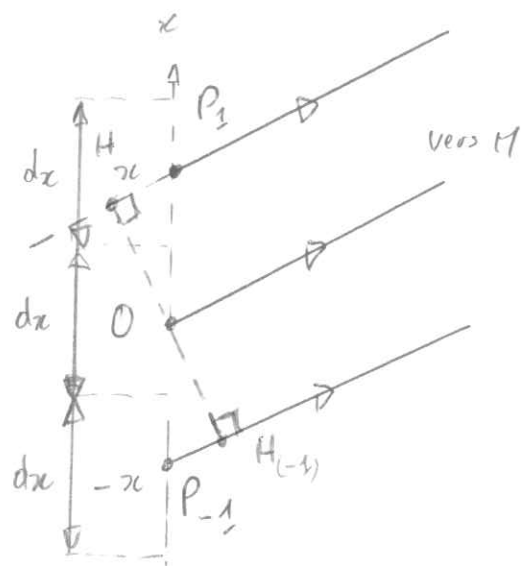
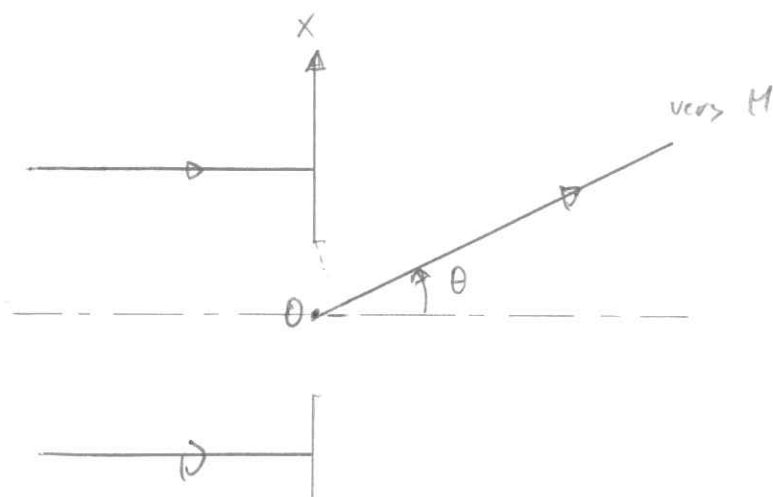
a) Principe d'Huygens - Fresnel : cf 11^{re} p.

" L'onde diffractée par une pupille peut être obtenue par la superposition des amplitudes émises par des sources secondaires réparties sur la surface diffractante ".

$\rightarrow$ ondelettes

" L'enveloppe des ondelettes forme une surface d'onde ".

" L'amplitude de la vibration lumineuse en P est la somme des amplitudes produites par les sources secondaires ".



* Amplitude de l'onde incidente

$$A(z, t) = A_0 \cos(\omega t - kz - \varphi_0)$$

$$A_0 \approx \sqrt{I_0}$$

* sur la fente, au point O $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$

$$z=0$$

$$A(0, t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

avec $\varphi_0 = 0$ (cf énoncé)

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t)$$

* à chaque point P on associe une source élémentaire de surface ds - la fente S_1 a donc pour aire $A(S_1)$

$$A(S_1) = \int ds$$

* Selon le principe des ondelettes, à chaque élément ds_i

$$\text{on associe une onde } dA_i = A(t) ds_i = A(t) (h dx)$$

(on considère des éléments ds_i de m² aire $ds = h dx$ où h est la hauteur de fente et dx un élément de largeur.

On repère les points P_i de surface ds_i par leur abscisse x .

* On écrit l'amplitude de l'onde diffractée, juste après la fente, dans la direction de H , sous l'angle θ .

juste après 0

$$A(0, \theta, t) = \int_i dA_i = \int_{-b/2}^{+b/2} (A_0 h) \cos(\omega t + \varphi(P_i)) dx$$

$$A(0, \theta, t) = A_0 h \int_{-b/2}^{+b/2} \cos(\omega t + \varphi(P_i)) dx$$

$\varphi(P_i)$ est la phase associée à la ddm en chaque point P_i
(chemin + court)

$$\varphi(P_i) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_i \quad \text{avec} \quad \delta_i = -x \sin \theta$$

δ_i : avance si $x > 0$

δ_i : retard si $x < 0$
(chemin + long)

$$A(0, \theta, t) = A_0 h \int_{-b/2}^{+b/2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta\right) dx$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$A(0, \theta, t) = A_0 h \int_{-b/2}^{+b/2} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta)} dx$$

$$= A_0 h e^{j\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} dx$$

$$(e^{jx} - e^{-jx}) = 2j \sin x$$

$$= \frac{A_0 h e^{j\omega t}}{-j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \left[e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

on pose :
 $A(t) = A_0 e^{j\omega t}$

$$= + \frac{2 h A(t)}{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \theta \right]$$

on pose
 $u(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \theta$

$$\frac{2u}{b} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$$

$$A(0, \theta, t) = (hb) A(t) \frac{\sin u(\theta)}{u(\theta)}$$

avec $u(\theta) = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta$

B III 2 b: $A(0, \theta, t) = (hb) A(t) \frac{\sin u(\theta)}{u(\theta)}$

avec $u(\theta) = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta$

$I(\theta) = \left\langle \frac{1}{2} k A^2 \right\rangle_t$ avec $k = 1$

$I(\theta) = \underbrace{\left\langle \left(\frac{hb}{2} \right)^2 A^2(t) \right\rangle_t}_{I_0} \left(\frac{\sin u(\theta)}{u(\theta)} \right)^2$

2c :

$I(0) = 0 \rightarrow \text{minimum}$

$\sin[u(\theta)] = 0 \Rightarrow u(\theta) = k\pi$

$\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta = k\pi \Rightarrow \sin \theta = \frac{k\lambda}{b}$

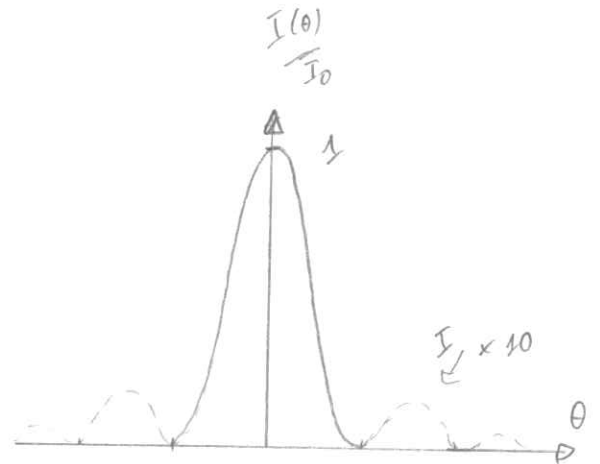
1^{er} mini $k = \pm 1$

$\boxed{\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}}$

si θ faible

$\theta(\text{rad}) \approx \sin \theta$

$\boxed{\theta = \pm \frac{\lambda}{b}}$



2d: Fentes d'Young

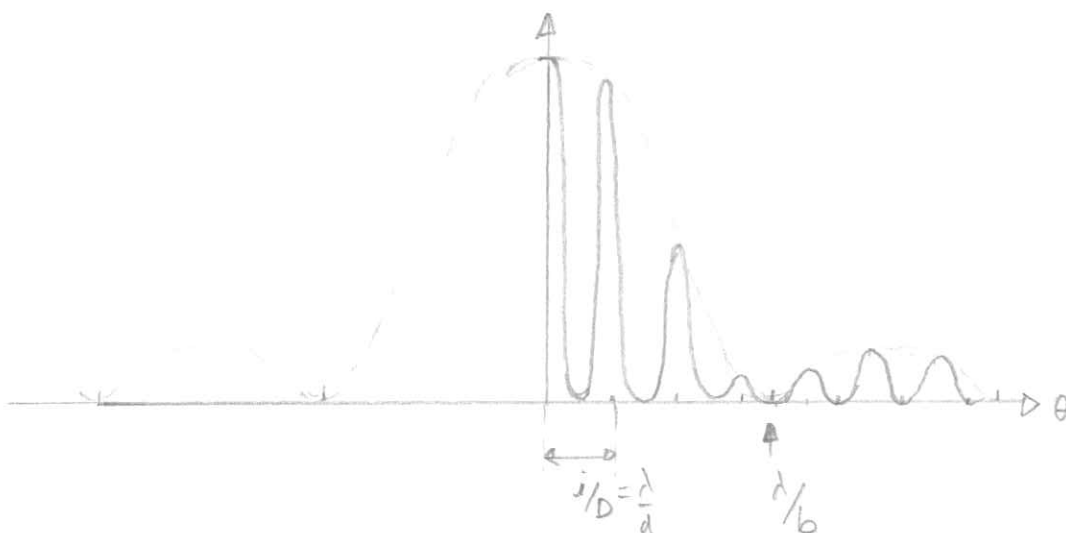
$I(\theta) = I_{\text{diff}} \times I_{\text{int}}$

$\Delta I_{\text{diff}} = AA^* = (hb)^2 \left[\frac{\sin u}{u} \right]^2$
(le coef $\frac{1}{2}$ est intégré dans I_{int})

$= 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right] \left[\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \right]$

$\left[\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \right]$

le coef $(hb)^2$ est intégré dans I_0



$i = \lambda \frac{D}{a}$ et $a = 3,5b$

$= \lambda \frac{D}{3,5b}$ $\frac{i}{D} = \pm \frac{\lambda}{b}$

7 franges dans le segment central.