

§ A.2.4. Sismographe Optique

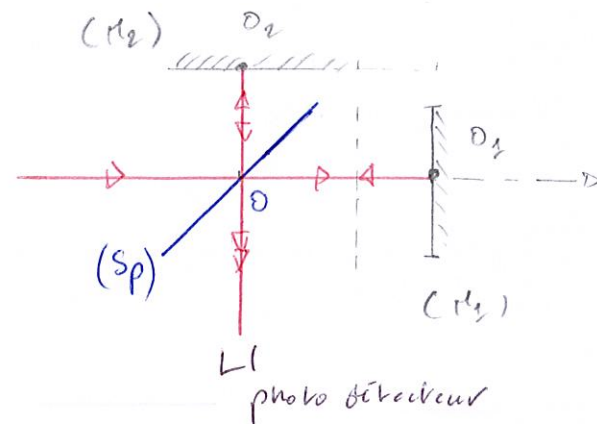
Sismographe $\rightarrow$ Interféromètre de Michelson avec 1 miroir "libre"

Interféromètre de Michelson

* Eclairage : laser He-Ne

* (Sp) $\rightarrow$ $\begin{cases} R \\ T \end{cases}$

* $E \propto \langle A^2 \rangle_t$



Q 28 : * Puissance Laser / enseignement

$$P \approx 1 \text{ mW} \quad (\text{classe II})$$

$$= 1 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

* $\varnothing$ faisceau $\approx 2 \text{ mm}$ $\rightarrow S = \pi r^2 \approx 3 \text{ mm}^2$ (1 C.S.)

$$= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

* $E (\text{W/m}^2) = P/S = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-6}} \approx 0,3 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$

$$\boxed{E = 3 \cdot 10^2 \text{ W m}^{-2}}$$

Q 29 : voir schéma et TP

1. C.S.

Q 30 : la séparatrice (supposée parfaite) "scinde" le faisceau en 2 $\rightarrow$ 2 "bras" de l'interféromètre.

* bras 1 : vers M_1

- 1 Transmission (Sp) $\rightarrow E_0 T$
- 1 Réflexion / M_1 $\rightarrow E_0 T$ ($R_M = 1$)
- 1 Réflexion (Sp) $\rightarrow (E_0 T) R$

$$\underline{E_1 = E_0 (T \cdot R)}$$

* bras 2 : vers M_2

- 1 Réflexion (Sp) $\rightarrow E_0 R$
- 1 — / M_2 $\rightarrow E_0 R$ ($R_M = 1$)
- 1 transmission (Sp) $\rightarrow (E_0 R) T$

$$\underline{E_2 = E_0 (R \cdot T)}$$

§ A. 2.4 (suite)

Q 30 (suite) : $\vec{E}_{ph} \neq \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Q 31 : si $R = 0,5$ $T = (1 - R) = 0,5$
 $= 0,8$ $T = 0,2$

$RT = 0,25$

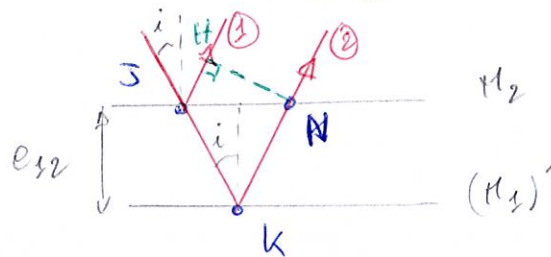
$RT = 0,16$

$R = 0,5$ correspond à 1 optimum de puissance en sortie du Michelson - cela permet aussi d'avoir 2 sources de m éclaircissement

Q 32 : Michelson $\rightarrow$ interf à 2 ondes $\Rightarrow \boxed{I(I) = 2I_0(1 + \cos \varphi)}$

Réglé en lame d'air [e_{12}] $\rightarrow \delta = 2e_{12}$

Démonstration -



en J 1 réflexion $\rightarrow$ ①

1 trans. $\rightarrow$ ②

en K 1 réflexion $\rightarrow$ ②

en N 1 transmis. $\rightarrow$ ②

* (M_2) $\rightarrow$ miroir "de sortie"

(M_1)' $\rightarrow$ image de M_1 par la séparatrice

[M_2] et [M_1] forment 1 lame d'air virtuelle - épaisseur e_{12}

* ① et ② sont issues d'une même source ponctuelle, primaire $\Rightarrow$ m φ_0 (phase à l'origine) $\Rightarrow$ Interférences possibles (on somme les amplitudes) $\rightarrow$ à l' ∞

* calcul de δ (d.o.s.m.) entre ① et ②

- retard de ② / ① $\rightarrow$ (JKN) $\rightarrow \delta_2 = \frac{2e_{12}}{\cos i}$

- retard de ① / ② $\rightarrow$ (JH) $\rightarrow \delta_1 = \overline{NJ} \sin i = \frac{2e_{12}}{\cos i} \sin^2 i$

$\delta = \delta_2 - \delta_1 = 2e_{12} \cos i$ au centre de la figure d'interférence,

$i = 0$ $\cos i = 1$ $\Rightarrow \underline{\delta = 2e_{12}}$

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \Rightarrow \underline{\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} e_{12}}$

§ A.2.4 (suite)

Q 32 (suite): Remarque : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ avec $\varphi = 2x$

$\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} c_{s2}$ $\mathcal{E} = \mathcal{I}(M)$ et $\mathcal{E}_0 = 4\mathcal{I}_0$ on trouve:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} c_{s2} \right)$$

Déplacement du miroir

→ (M₂) Miroir fixe

→ (M₁) Miroir mobile - masse m - déplacement le long de $O\vec{x}$

→ (O, y, z) référentiel du laboratoire.

* la position de (M₁) dans ce référentiel est $y(t)$.

* la force de frottement fluide que subi M₁ est $\vec{F}_r = -\gamma \frac{dy}{dt} \vec{u}_y$

→ le déplacement de la table (et donc du labo), en raison du séisme, est suivant $O\vec{x}$ et noté $x(t)$. On mesure le déplacement en "suivant" (M₂) l'image de M₂ par la séparatrice.

$[x(t) = X_m \cos(\omega t)]$ en Q 33.

→ Dans un référentiel Galiléen on peut écrire le PFD appliqué au mouvement de M₁ -

M₁ subi 2 forces : * la force d'entraînement (ou d'inertie) (de réaction au déplacement) * la force de frottement fluide.

Q 33:

PFD
sur $O\vec{x}$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\gamma \frac{dy}{dt} - m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Remarque 1: le signe - vient du fait que ces forces "s'opposent" au déplacement.

Remarque 2: la loi de composition des mouvements donne,
 $\vec{a}_{\text{absolue}} = \vec{a}_{\text{relative}} + \vec{a}_{\text{entraînement}} + \vec{a}_{\text{coriolis}}$

et $m \vec{a}_{\text{absolue}} = \sum \vec{F} = 0$ (pas de force appliquée)

§ A.2.4 Suite

Q 33 (Suite) : Equation du mouvement

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -f \frac{dy}{dt} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dy}{dt} = -\frac{d^2 x}{dt^2}} \quad [1]$$

Q 34: "l'excitation", due au séisme est de la forme : $x(t) = X_H \cos(\omega t)$
 la "réponse" du sismographe : $y(t) = Y_H \cos(\omega t - \varphi)$

En notation complexe : $x(t) = X_H e^{j\omega t}$
 $y(t) = \underline{Y_H} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Y_H} = Y_H e^{-j\varphi}$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 X_H e^{j\omega t}$$

$$\frac{dy}{dt} = j\omega \underline{Y_H} e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 \underline{Y_H} e^{j\omega t}$$

On remplace dans [1] :

$$-\omega^2 \underline{Y_H} (e^{j\omega t}) + j \frac{f}{m} \omega \underline{Y_H} (e^{j\omega t}) = +\omega^2 X_H (e^{j\omega t})$$

$$\underline{Y_H} \left(-\omega^2 + j \frac{f}{m} \omega \right) = +\omega^2 X_H \quad \text{solution à [1]}$$

$$\underline{Y_H} = \frac{\omega^2 X_H}{-\omega^2 + j \frac{f}{m} \omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y_H} = Y_H e^{-j\varphi}$$

$$\text{d'où} \quad Y_H = |\underline{Y_H}| = \left[\frac{\omega^4 X_H^2}{\omega^4 + \left(\frac{f}{m}\right)^2 \omega^2} \right]^{1/2} = \frac{\omega^2 X_H}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{f}{m}\right)^2 \omega^2}}$$

$$\boxed{Y_H = \frac{\omega X_H}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{f}{m}\right)^2}}}$$

$$\text{et} \quad \tan \varphi = \frac{\omega^2 X_H}{\omega^4 + \left(\frac{f}{m}\right)^2} \left(-\omega^2 - j \frac{f}{m} \omega \right)$$

§ A.2.4 (suite)

Q 34 (suite) : $\text{Arg}(\underline{Y}) = \frac{-\frac{f}{m} \omega}{-\omega^2} = + \frac{f}{m\omega}$ et $\text{tg}(-\varphi) = -\text{tg}(+\varphi)$

$$+\varphi = \arctg\left(-\frac{f}{m\omega}\right) \quad (\text{modulo } \pi)$$

Q 35 : Signal enregistré

Eclairement du photodétecteur (cf Q32) : $E = E_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} e_{se}\right)$

Courant en sortie du _____ : $I(t) = k E_0 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} e_{se}\right]$

Avec $e(t) = d_0 + y(t)$

où d_0 : lame d'air "au repos" avant le séisme

et $y(t) = y_A \cos(\omega t - \varphi)$

et $y(t)$: mouvement de M_2 autour de la position (A), sous l'effet du séisme.

sous l'effet du séisme, la lame d'air $e(t)$ change "d'épaisseur"

de façon périodique $\Rightarrow$ le chemin optique change $\Rightarrow$ la d.d.m. change

$\Rightarrow$ on "voit" défiler des franges d'ifc au centre de la figure -

d'où

$$I(t) = I_0 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + y(t))\right]$$

Q 36 : Simulations numériques

Les simulations donnent $\frac{I(t)}{I_0}$ pour différents "couplés" d_0, λ

Avec $d_0 \rightarrow$ "réglage" initial du microlson / sismographe

$\lambda \rightarrow$ paramètre caractéristique de la source de lumière.

En observant ces simulations, on voit apparaître 2 périodes :

* 1 courte, T_λ qui correspond au défilement des franges

* 1 longue, $T_{\text{séisme}}$ aux oscillations $[y(t)]$ du miroir M_2 , sous l'effet du mouvement du laboratoire.

§ A.2.4 (suite)

Q36 (suite) : Seules les extrema $\begin{cases} \text{maxima} \\ \text{extinction} \end{cases}$ liés à T_S sont "intéressant" (pour la sismologie) - Pour étudier ces extrema, on mesure $T_S \approx 0,2 \Delta$ (sur tt les courbes) $f_S \approx 5 \text{ Hz}$

Q37 : Etude des extrema.

$$I(t) = I_0 \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + y(t)) \right]$$

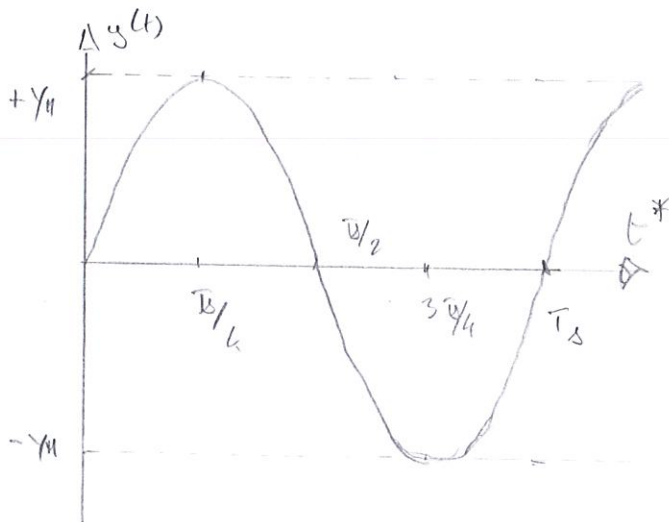
$$\frac{dI(t)}{dt} = -2 I_0 \left\{ \underbrace{\sin \left[\right] \cos \left[\right]}_{\text{modulation en } T_\lambda} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\right]}_{\text{modulation en } T_S} \right\}$$

si $\sin \left[\right] = 0 \Rightarrow \text{maxi}$
 $\cos \left[\right] = 0 \Rightarrow \text{mini}$ $I(t)$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + y(t)) \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + (y_H \cos(\omega t - \varphi))) \right]$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{2\pi}{\lambda} y_H \omega \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sin(\omega t - \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t - \varphi) = \pm 1 \Rightarrow y(t) \Big|_{\frac{dI}{dt}=0} = \pm y_H$$



$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow M_S$ est sur 1
 position "extrême" $\pm y_H$

Exemple : pour le cas
 $d_0 = 2,27 \lambda$ à $t^* = 0$ $I(0) = 0$ $t = T/4$
 $t = 0,05$ ou $t^* = T/2$ $I(T/2) = 0$
 $t = 0,15$ $t^* = T$ $I(T) = 0$

Dans ce cas le miroir (M_S) repasse par sa position médiane (A)

lors que $t^* = T/4$ (resp $t = 0$) puis $t^* = 3T/4$ (resp. $t = 0,1$)

§ A.2.4 (suite)

Q 37 (suite) Lorsque le miroir se déplace entre les deux positions extrêmes $(+y_M)$ et $(-y_M)$, on voit "défiler" 5 franges (c8 Fig 10 courbe 5)
i.e. 5 maxi d'interférences $\Rightarrow \delta = 5 \lambda$ ($p=5$)

et $\delta = 2e$ avec $e = 2 y_M \Rightarrow \delta = 4 y_M \Rightarrow y_M = \frac{5}{4} \lambda$

et $x_M = f(y_M)$ - Rappel Q 34 : $y_M = \frac{\omega x_M}{\sqrt{\omega^2 + (f/m)^2}}$

$$x_M = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 + (f/m)^2} \cdot \left(\frac{5}{4} \lambda\right)$$

$$x_M = \left[1 + \left(\frac{f}{m\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \left(\frac{5}{4} \lambda\right)$$

avec $\lambda =$ longueur onde du laser He-Ne soit $\lambda = 632,8 \text{ nm}$.

$\omega =$ pulsation de l'onde sismique soit $\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{0,2} \approx 0,314 \text{ rad/s}$

$f/m =$ $\begin{cases} \text{propriété du sismographe} \\ \text{sensibilité} \end{cases}$ soit $f/m = 4,2 \text{ s}^{-1}$

AN : $f/m \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{f}{m} \cdot \frac{0,2}{\pi} \approx 0,134 \rightarrow \left(\frac{f}{m\omega}\right)^2 \approx 1,73 \cdot 10^{-3}$

$$x_M \approx \sqrt{1,018} \left(\frac{5}{4} \lambda\right)$$

1,009

$$x_M \approx 1,26 \lambda \approx 0,8 \text{ } \mu\text{m}$$