

TD4 : corrigé

1) Ecrire les conditions aux limites concernant l'application de la pression à l'intérieur du réservoir.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{lat}}^{\text{int}} &\Rightarrow r = R - e, & \underline{n} &= -\underline{e}_r \\
 S_{\text{sup}}^{\text{int}} &\Rightarrow z = L/2 - e, & \underline{n} &= -\underline{e}_z \\
 S_{\text{inf}}^{\text{int}} &\Rightarrow z = -(L/2 - e), & \underline{n} &= +\underline{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{lat}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_r) &= p \underline{e}_r \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(r = R - e) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \\
 (2) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{sup}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_z) &= p \underline{e}_z \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(z = L/2 - e) \cdot (-\underline{e}_z) = p \underline{e}_z \\
 (3) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{inf}}^{\text{int}}, \underline{n} = \underline{e}_z) &= -p \underline{e}_z \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(z = -L/2 + e) \cdot (\underline{e}_z) = -p \underline{e}_z
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad \underline{\underline{\sigma}}(r = R - e) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r = R - e) = -p \\ \sigma_{\theta r}(r = R - e) = 0 \\ \sigma_{zr}(r = R - e) = 0 \end{cases}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}(r = R - e)] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r = R - e) & \sigma_{\theta z}(r = R - e) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r = R - e) & \sigma_{zz}(r = R - e) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \underline{\underline{\sigma}}(z = L/2 - e) \cdot (-\underline{e}_z) = p \underline{e}_z \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rz}(z = L/2 - e) = 0 \\ \sigma_{\theta z}(z = L/2 - e) = 0 \\ \sigma_{zz}(z = L/2 - e) = -p \end{cases}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}(z = L/2 - e)] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = L/2 - e) & \sigma_{r\theta}(z = L/2 - e) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = L/2 - e) & \sigma_{\theta\theta}(z = L/2 - e) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$(3) \Rightarrow [\underline{\underline{\sigma}}(z = -L/2 + e)] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = -L/2 + e) & \sigma_{r\theta}(z = -L/2 + e) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = -L/2 + e) & \sigma_{\theta\theta}(z = -L/2 + e) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

2) Ecrire les conditions aux limites concernant l'extérieur du réservoir.

$$\begin{aligned} S_{\text{lat}}^{\text{ext}} &\Rightarrow r = R, \quad \underline{n} = +\underline{e}_r \\ S_{\text{sup}}^{\text{ext}} &\Rightarrow z = L/2, \quad \underline{n} = +\underline{e}_z \\ S_{\text{inf}}^{\text{ext}} &\Rightarrow z = -L/2, \quad \underline{n} = -\underline{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad &\underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{lat}}^{\text{ext}}, \underline{n} = \underline{e}_r) = \underline{0} \\ (2) \quad &\underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{sup}}^{\text{ext}}, \underline{n} = \underline{e}_z) = \underline{0} \\ (3) \quad &\underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{inf}}^{\text{ext}}, \underline{n} = -\underline{e}_z) = \underline{0} \end{aligned}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}(z = \pm L/2)] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = \pm L/2) & \sigma_{r\theta}(z = \pm L/2) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = \pm L/2) & \sigma_{\theta\theta}(z = \pm L/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}(r = R)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r = R) & \sigma_{\theta z}(r = R) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r = R) & \sigma_{zz}(r = R) \end{pmatrix}$$

3) On considère que le tenseur des contraintes dans la paroi latérale est sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(r)$, et que la composante $\sigma_{rr}(r)$ y évolue linéairement. Déterminer son expression.

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r = R) = 0 \\ \sigma_{rr}(r = R - e) = -p \end{cases}$$

$$\sigma_{rr}(r) = Ar + B \Rightarrow \dots \Rightarrow \sigma_{rr}(r) = \frac{p}{e}(r - R) :$$

4) A partir des conditions aux limites précédentes et de l'équation d'équilibre, déterminer la composante $\sigma_{\theta\theta}(r)$ en considérant qu'au sein de la paroi $r \approx R$.

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr}(r) \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & \sigma_{\theta z}(r) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r) & \sigma_{zz}(r) \end{pmatrix}$$

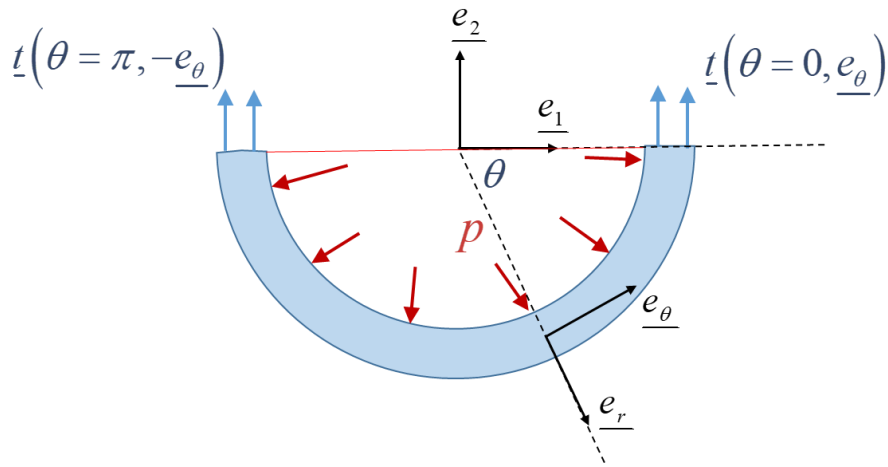
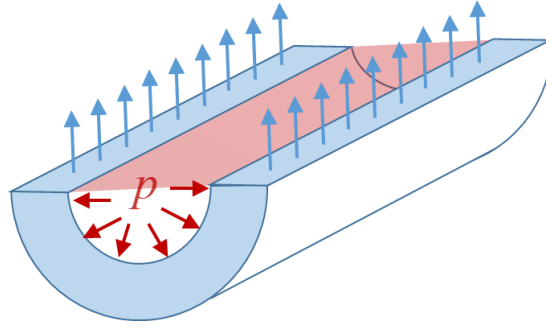
$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left(\cancel{\underline{f}^m} - \underline{a} \right) = \underline{0}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)}{r} = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{p}{e}(2r - R)$$

Si on fait l'approximation $r \approx R$ au sein de la paroi, cette expression devient :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) \approx \frac{pR}{e}$$

5) Retrouver le même résultat en considérant l'équilibre d'un demi-cylindre sous pression coupé par une facette de normale $\underline{e}_\theta$, en considérant que le vecteur-contrainte est uniformément réparti dans la paroi.



$$\underline{f}_e = \int_0^\pi \int_0^L p \underline{e}_r R d\theta dz = -2pRL \underline{e}_2$$

$$\underline{f}_i = \int_{R-e}^R \int_0^L \underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) dr dz + \int_{R-e}^R \int_0^L \underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) dr dz$$

$$\underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta + \sigma_{z\theta} \underline{e}_z$$

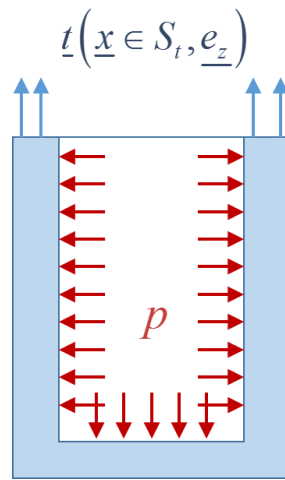
$$\underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) = -\sigma_{r\theta} \underline{e}_r - \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta - \sigma_{z\theta} \underline{e}_z$$

$$\theta=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_r = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_\theta = \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z = \underline{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 + \sigma_{z\theta} \underline{e}_3$$

$$\theta=\pi \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_r = -\underline{e}_1 \\ \underline{e}_\theta = -\underline{e}_2 \\ \underline{e}_z = \underline{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 - \sigma_{z\theta} \underline{e}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_i &= \int_{R-e}^R \int_0^L (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 + \sigma_{z\theta} \underline{e}_3) dr dz + \int_{R-e}^R \int_0^L (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 - \sigma_{z\theta} \underline{e}_3) dr dz \\ \underline{f}_i &= 2Le (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2) \\ \begin{cases} \underline{f}_e = -2pRL \underline{e}_2 \\ \underline{f}_i = 2Le (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2) \\ \underline{f}_e + \underline{f}_i = \underline{0} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2pRL = 2Le \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \frac{pr}{e} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6) En effectuant une démarche similaire pour une autre facette, déterminer complètement le tenseur des contraintes dans la paroi latérale. Discuter des différentes composantes.



$$\underline{f}_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{R-e} -p \underline{e}_z r d\theta dr = -2\pi p \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R-e} \approx -\pi p R^2 \underline{e}_z$$

$$\underline{f}_i = \int_{R-e}^R \int_0^{2\pi} \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) r d\theta dr \approx \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) 2\pi e R$$

$$\underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x} \in S_t) \cdot \underline{e}_z = \sigma_{rz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_r + \sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_z$$

$$\underline{f}_i \approx 2\pi e R (\sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{pR}{2e} = \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \\ 0 = \sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \end{cases}$$

FINALEMENT :
$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr}(r) \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pR}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{pR}{2e} \end{pmatrix}$$

On peut faire les remarques suivantes :

- le tenseur des contraintes est déjà exprimé dans sa base principale, car la matrice $[\underline{\underline{\sigma}}]$ est diagonale. On en déduit que cet état de chargement n'induit aucune contrainte de cisaillement.
- On observe que, même si la pression est appliquée dans la direction de la composante σ_{rr} , cette composante est négligeable devant $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} car $R/e \gg 1$.
- La contrainte la plus élevée est $\sigma_{\theta\theta}$: elle s'interprète comme la « résistance » du réservoir à un changement de diamètre lors de la mise sous pression. C'est d'ailleurs généralement dans la direction de qu'on observe la rupture des réservoirs sous pression :



- On observe que si l'on veut doubler le rayon du réservoir, il faut également doubler son épaisseur (ce qui a un gros impact sur le volume de métal utilisé). Ainsi, pour augmenter la capacité du réservoir il vaut mieux augmenter sa longueur, ce qui n'influence pas la contrainte au sein du matériau...