

Devoir 6 MFA : Compacité faible de la boule unité fermée A rendre pour la rentrée de janvier

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite $(x_{j(n)})$ et $x \in H$ tels que

$$x_{j(n)} \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } H.$$

Dans un premier temps, on se donne $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable. Soit donc une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $z_k \in H$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $H = \overline{\{z_k / k \in \mathbb{N}\}}$.

On se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $M > 0$ comme dans l'énoncé du théorème.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(z) = \langle x_n, z \rangle$ pour tout $z \in H$.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est linéaire et continue (c'est-à-dire $f_n \in H'$).
2. Montrez qu'il existe une famille $(j_k)_k$ telle pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante et la suite $(f_{j_0 \circ j_1 \circ \dots \circ j_k(n)}(z_k))$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $j(n) := j_0 \circ j_1 \circ \dots \circ j_n(n)$.

3. Montrez que $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe $\phi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $j(n) = j_0 \circ \dots \circ j_k(\phi_k(n))$ pour tout $n \geq k$.
5. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{j(n)}(z_k))_n$ est convergente lorsque $n \rightarrow \infty$.
6. Montrez que pour tout $z \in H$, la suite $(f_{j(n)}(z))_n$ est convergente. On notera $f(z)$ sa limite.
7. Montrez que $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue (c'est-à-dire $f \in H'$).
8. Déduisez-en l'existence de $x \in H$ tel que $x_{j(n)} \rightharpoonup x$ faiblement lorsque $n \rightarrow \infty$.
9. Traitez le cas général d'un espace de Hilbert quelconque en vous ramenant au cas d'un espace séparable.

Important : L'extraction des questions 2 à 5 est le *procédé d'extraction de Cantor*.