

TD3 : Complétude et Théorèmes de point fixe

Exercice 1. Soit $k \in]0, 1[$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$ tels que $|h'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x - h(y), y - h(x)) \end{cases}.$$

Alors ϕ est un C^1 -difféomorphisme. Voici quelques indications :

- On fixe $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Montrez que prouver l'existence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x, y) = (X, Y)$ est équivalent à trouver un point fixe d'une applications $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bien choisie.
- Avec une norme sur $\mathbb{R}^2$ bien choisie et l'Inégalité des Accroissements Finis, montrez que T est contractante.
- Utilisez le Théorème d'Inversion Globale (voir Appendice du cours) pour conclure.

Exercice 2. Soit K un compact convexe d'un evn. Soit $f : K \rightarrow K$ continue telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in K.$$

On va montrer que f admet un point fixe.

- (1) On fixe $a \in K$. En prenant un barycentre entre a et $f(x)$, approchez f par une suite d'applications contractantes.
- (2) Concluez en utilisant le théorème du point fixe.

1. POINTS FIXES ATTRACTIFS ET RÉPULSIFS

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow I$. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ point fixe de f . On note

$$A := \{(x_n)_n / x_n \in I \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que

- α est attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite $(x_n)_n \in A$ telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - \alpha| < \delta$, alors (x_n) converge vers α .
- α est répulsif si pour toute suite $(x_n)_n \in A$ qui converge vers α , alors (x_n) stationne en α .

1. On suppose que f est C^1 et que $|f'(\alpha)| < 1$. Montrez que α est attractif.

Indications :

- Montrez qu'il existe $\delta > 0$ et $0 < k < 1$ tels que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$.
- Montrez que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$.
- Montrez que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$ est stable par f .
- Concluez en utilisant le théorème du point fixe.

2. On suppose que f est C^1 et que $|f'(\alpha)| > 1$. Montrez que α est répulsif.

Indications :

- Montrez qu'il existe $\delta > 0$ et $k > 1$ tels que $|f'(x)| \geq k$ pour tout $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$.
 - Montrez que $|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$.
On se donne $(x_n)_n \in A$.
 - Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap I$ pour tout $n \geq n_0$.
 - Pour $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, minorez $|x_{n+p} - \alpha|$ en fonction de $|x_n - \alpha|$ et concluez.
- 3.** Montrez que si f est C^1 et que $|f'(\alpha)| = 1$, alors tout peut se produire.
- 4.** Généralisez à $f : U \rightarrow U$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

2. MÉTHODE DE NEWTON

Soit $[a, b]$ un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . On suppose que :

- (1) Il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$,
- (2) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

On pose alors

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

- 1.** Déterminez F' .
- 2.** Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $z \in [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \subset [a, b]$, alors la suite $(x_n)_n$ définie par $\{x_0 = z; x_{n+1} = F(x_n) \text{ pour tout } n\}$ est bien définie et converge vers α .
- 3.** On suppose que f est C^3 . Montrez que, quitte à prendre $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $K > 0$ tel que pour tout $z \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$, la suite (x_n) définie au **2.** vérifie

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déduisez-en alors que $K|x_n - \alpha| \leq (K|z - \alpha|)^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette convergence est-elle intéressante ? Étendez ce résultat au cas $f \in C^2([a, b])$.

- 4.** Généralisez à $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3. LE THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ DANS UN CAS PARTICULIER

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M \text{ and } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à prouver l'existence de $\delta > 0$ et $x \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ tels que that

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{pour tout } t \in [-\delta, \delta] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard.

- Soit $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ une fonction continue. Montrez qu'on a l'équivalence :

$$\{x \text{ est } C^1 \text{ et résoud (1)}\} \Leftrightarrow \left\{ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ pour tout } t \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} T : C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \right) \end{aligned}$$

- Montrez que T est bien définie et que pour $\delta > 0$ bien choisi, T est contractante en munissant $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrez l'existence et l'unicité de la solution de (1).

4. CONTINUITÉ PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES

Proposition : Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $F : E \times X \rightarrow X$ une fonction continue pour la topologie produit. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que pour tout $\lambda \in E$, $T(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne. Pour tout $\lambda \in E$, il suit du Théorème de Picard qu'il existe un unique $x_\lambda \in X$ qui est un point fixe de $T(\lambda, \cdot)$. Alors l'application $\lambda \rightarrow x_\lambda$ de $E \rightarrow X$ est continue.

Exercice 3. Démontrez cette Proposition. Avant de considérer le cas général, commencez par les cas suivants :

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique (E, d_E) et il existe $L > 0$ tel que

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda', x')) \leq Ld_E(\lambda, \lambda') + kd(x, x')$$

pour tous $\lambda, \lambda' \in E$ et $x, x' \in X$.

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique.
- (MFA) Cas général.