

Devoir 2 : à rendre le 4 octobre

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subset X$, on définit les ensembles suivants :

$$A_1 := \{x \in X / \text{ pour tout } O \text{ ouvert tel que } x \in O, \text{ alors } O \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_2 := \{x \in X / \text{ pour tout } B \text{ boule ouverte telle que } x \in B, \text{ alors } B \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_3 := \{x \in X / \text{ pour tout } r > 0, \text{ alors } B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Montrez que $A_1 = A_2 = A_3$. C'est l'adhérence de A .

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeur dans X et soit $x \in X$. Montrez l'équivalence des deux propositions suivantes :

- La suite $(x_n)_n$ ne converge pas vers x ;
- Il existe $\epsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(x_{j(n)})$ tels que $d(x_{j(n)}, x) > \epsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Rédigez la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie esquissée en cours.

Exercice 4. Soient $A, B \subset E$ un evn tels que

- A, B non vides,
- A est fermé et B est compact
- $A \cap B = \emptyset$

On montre ici de façon séquentielle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|a - b\| \geq \delta$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.

- Montrez que si la conclusion est fausse, alors il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Concluez en utilisant les propriétés de A et B .

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$ au sens

$$\forall A > 0, \exists R > 0 \text{ tel que } \forall x \in E \{ \|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > A \}.$$

Montrez alors que φ admet un minimum sur E .

Note : Ce résultat sera généralisé à la dimension infinie pour des fonctions convexes sur des Hilbert.

1. ESPACES LOCALEMENT COMPACTS (MFA)

Soit X un espace topologique séparé.

- On dit que X est localement compact si tout point admet un voisinage compact.
- On appelle base d'ouverts d'un point $x \in X$ toute collection $\mathcal{O}_x$ d'ouverts contenant x tels que pour tout ouvert U contenant x , alors il existe $V \in \mathcal{O}_x$ tel que $V \subset U$.

- (1) Montrez que dans un espace métrique, tout point admet une base dénombrable d'ouverts .
- (2) Que dire d'un evn localement compact ?
- (3) On suppose que X est localement compact. Montrez que tout point admet une base d'ouverts relativement compacts.
- (4) On suppose que X est localement compact et que tout point admet une base dénombrable d'ouverts. Montrez que tout point admet une base dénombrable d'ouverts relativement compacts.

2. CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ (MFA)

Soient X, Y deux espaces topologiques séparés (on omet de préciser la topologie). Soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est continue si

pour tout $V \subset Y$ ouvert, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X .

On dit que f vérifie la propriété $(\star)$ si :

$$\{\forall x \in X \text{ et } \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \text{ qui CV vers } x, \text{ alors } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV vers } f(x)\} \quad (\star)$$

On dit que X admet en tout point une base dénombrable d'ouverts dénombrables si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dépendant de x) telle que :

- (i) $x \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) U_n est un ouvert de X pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) pour tout ouvert U de X tel que $x \in U$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset U$.

1. On suppose que X est à base dénombrable d'ouverts en tout point. Montrez que pour tout $x \in X$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la définition peut être choisie telle que $U_{n+1} \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans les questions suivantes, on prendra toujours une telle suite.

2. On suppose que f est continue. Montrez que f vérifie $(\star)$.

3. On suppose dans toute cette question que f n'est pas continue et que X est à base dénombrable d'ouverts en tout point.

- (a) Montrez qu'il existe V ouvert de Y et qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) \in V$ et pour tout ouvert U de X qui contient x , alors $U \not\subset f^{-1}(V)$.
- (b) On se donne une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts DECROISSANTS qui vérifie (i)-(ii)-(iii). Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in U_n$ et $x_n \notin f^{-1}(V)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Montrez que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (d) Montrez que f ne vérifie pas $(\star)$.

En conclusion, on a montré que lorsque X est à base dénombrable d'ouverts en tout point, alors f est continue si et seulement si f vérifie $(\star)$: c'est la caractérisation séquentielle de la continuité.