

Partiel 1 du 10 novembre

Durée 2h. Documents et machines électroniques interdits.

On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des sous-ensembles suivant, indiquez s'il est ouvert, fermé ou bien ni l'un ni l'autre :

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 < 16 \text{ et } x + y \leq 1\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^5 + 4y \leq 3 \text{ ou } x^2 + y \geq 0\}$

Chaque réponse devra être démontrée.

Exercice 2. On se donne une norme $\|\cdot\|$ sur $E := C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mu_n := \inf\{\|f - P\| / P \in \mathbb{R}_n[X]\}.$$

Montrez qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\mu_n = \|f - P_n\|$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Soit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- $K_n \subset X$ est compact non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- la suite (K_n) est décroissante, c'est-à-dire $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrez que $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
- (2) Soit U un ouvert de X tel que $K \subset U$. Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 4. 1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminez la norme de u lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

2. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_1 : C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) + f(0) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} T_2 : C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx \end{array} \right.$$

- (1) Montrez que T_1 et T_2 sont linéaires continues
- (2) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \leq 2$ et $\|T_2\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \leq 2$.
- (3) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} = 2$ et que cette norme est atteinte.
- (4) En utilisant une famille de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ qui vaut -1 en 0 et "quasiment" partout 1 sinon, montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} = 2$.
- (5) Montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} = 2$ n'est pas atteinte.

PROBLÈME 1 : UNE ÉQUATION INTÉGRALE LINÉAIRE

On se donne $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation :

$$u(x) = \varphi(x) + \int_0^1 \lambda k(x-y)u(y) dy \text{ pour tout } x \in [0, 1]. \quad (\star)$$

Une telle équation est dite "intégrale". Pour $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $T(u)$ par

$$\begin{aligned} T(u) : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) + \int_0^1 \lambda k(x-y)u(y) dy \end{aligned}$$

- (1) Montrez que pour tout $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, alors $T(u) \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

On définit alors

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}) \\ u &\mapsto T(u) \end{aligned}$$

On munit $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme usuelle $\|u\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$.

- (2) Montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que lorsque $|\lambda| < \lambda_0$, alors T est contractante.
 (3) Pour $|\lambda| < \lambda_0$ comme à la question précédente, montrez l'existence et l'unicité de $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ solution de $(\star)$.

PROBLÈME 2 : UNE ÉQUATION INTÉGRALE NON-LINÉAIRE

On se donne $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation :

$$u(x) = \varphi(x) + \int_0^1 \lambda k(x-y)u^2(y) dy \text{ pour tout } x \in [0, 1]. \quad (\star\star)$$

Pour $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $S(u)$ par

$$\begin{aligned} S(u) : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) + \int_0^1 \lambda k(x-y)u^2(y) dy \end{aligned}$$

- (1) Montrez que pour tout $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, alors $S(u) \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On conserve toujours la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On se donne $R > 0$. On note alors

$$\overline{B}_{C^0}(\varphi, R) = \{u \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) / \|u - \varphi\|_\infty \leq R\}.$$

- (2) Montrez qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $|\lambda| < \lambda_1$, il existe $K \in]0, 1[$ tel que pour tous $u, v \in \overline{B}_{C^0}(\varphi, R)$, alors

$$\|S(u) - S(v)\|_\infty \leq K\|u - v\|_\infty.$$

- (3) Montrez qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que pour tout $|\lambda| < \lambda_2$, pour tout $u \in \overline{B}_{C^0}(\varphi, R)$, alors $S(u) \in \overline{B}_{C^0}(\varphi, R)$.

- (4) Montrez qu'il existe $\lambda_3 > 0$ tel que pour $|\lambda| < \lambda_3$, alors

$$\begin{aligned} S : \overline{B}_{C^0}(\varphi, R) &\rightarrow \overline{B}_{C^0}(\varphi, R) \\ u &\mapsto S(u) \end{aligned}$$

est définie et contractante.

- (5) Pour $|\lambda| < \lambda_3$ comme à la question précédente, montrez l'existence de $u \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ solution de $(\star\star)$.

Remarque : ce type de méthode est utilisé pour la résolution d'équations différentielles. Une application fera l'objet d'un devoir facultatif.