

## TD4 : Lemme de Baire (1) et méthode de continuité

### 1. EXISTENCE DE FONCTIONS CONTINUES DÉRIVABLES NULLE-PART

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$O_k := \{f \in C([0, 1]) \mid \forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1] \text{ tel que } |f(x) - f(y)| > k|x - y|\}.$$

1. Montrez que  $O_k$  est un ouvert de  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2. Pour  $n \geq 1$ , on définit la fonction  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par :

- $f_n(\frac{k}{n}) = 0$  pour tout  $k = 0, \dots, n$
- $f_n(\frac{k+1/2}{n}) = 1$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$
- $f_n$  est continue et affine sur  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1/2}{n}]$  et  $[\frac{k+1/2}{n}, \frac{k+1}{n}]$  pour  $k$  ad-hoc.

Dessinez la fonction  $f_n$ . Montrez que pour tout  $x \in [0, 1]$ , il existe  $y \in [0, 1]$  tel que  $|f_n(x) - f_n(y)| > n|x - y|$ .

3. En utilisant la densité des fonctions lipschitziennes dans  $C([0, 1])$ , montrez que  $O_k$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

4. En utilisant le lemme de Baire, montrez qu'il existe des fonctions continues dérivables nulle-part. De plus, montrez qu'elles sont denses dans les fonctions continues sur  $[0, 1]$ .

### 2. UN PEU DE NORMES

**Exercice 1.** Soit  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire. On note  $A = (a_{ij})$  sa matrice représentative dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Déterminez la norme de  $u$  lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont munis des normes suivantes :

$$u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ et } u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty).$$

Que se passe-t'il avec les autres combinaisons des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ?

**Exercice 2.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn. Montrez que  $T : L_c(E) \rightarrow L_c(E)$  définie par  $T(u) = u^3$  pour tout  $u \in L_c(E)$  est continue.

**Exercice 3.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un Banach. Montrez que la fonction  $u \mapsto u^{-1}$  est continue de  $Gl_c(E)$  dans lui-même.

### 3. CONTINUITÉ DES SOLUTIONS PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE

**Exercice 4.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  des Banach. Soit  $A \in C^0([0, 1], L_c(E, F))$  continue telle que

- (1) Il existe  $c > 0$  tel que  $\|A(\lambda)[x]\|_F \geq c\|x\|_E$  pour tout  $x \in E$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$  ;
- (2)  $A(0) : E \rightarrow F$  est bijective continue, d'inverse continu.

Montrez que  $A(\lambda)$  est un homéomorphisme pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour cela, on supposera que  $E = F$  et  $A(0) = Id_E$  dans un premier temps et on suivra les étapes suivantes :

- Montrez qu'il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $A(\lambda) \in Gl_c(E)$  pour tout  $\lambda \in [0, \epsilon_0]$ .
- Montrez qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $\lambda, \mu \in [0, 1]$ , si  $A(\lambda) \in Gl_c(E)$  et  $|\lambda - \mu| < \alpha$ , alors  $A(\mu) \in Gl_c(E)$ . On définit

$$\lambda_0 := \sup\{\lambda \in [0, 1] \text{ tel que } A(\mu) \in Gl_c(E) \text{ pour tout } \mu \in [0, \lambda]\}.$$

- Montrez que  $\lambda_0 > 0$ , puis que  $\lambda_0 = 1$  en raisonnant par l'absurde.
- Montrez que  $A(\lambda) \in Gl_c(E)$  pour tout  $\lambda \in [0, 1]$
- Traitez le cas général  $E \neq F$ .

## 4. APPLICATION DU PROLONGEMENT PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE

Soient  $a, \omega \in C^0([0, 1])$ . On suppose que  $\omega(t) > 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On se donne  $y \in C^0([0, 1])$ . Le but de ce problème est de montrer qu'il existe une unique fonction  $x \in C^2([0, 1])$  telle que

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x'(t) + \omega(t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E)$$

Pour cela, on va introduire un paramètre qui permet de transformer (E) en une équation à coefficients constants, qui elle est résoluble. Pour  $\lambda \in [0, 1]$ , on considère l'équation

$$\begin{cases} -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

et, on définit  $A(\lambda) : C^2([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$  telle que pour  $x \in C^2([0, 1])$ , on a  $A(\lambda)(x) := \varphi$  où

$$\varphi(t) := -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Sur  $C^2([0, 1])$ , on définit la norme

$$\|u\|_{C^2} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \text{ for all } u \in C^2([0, 1]).$$

**Etape 1 : Etude de  $A(\lambda)$  :** 1. Montrez que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $A(\lambda) : (C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  est continue.

2. Montrez que  $A : [0, 1] \rightarrow L_c(C^2([0, 1]), C^0([0, 1]))$  est continue (avec les bonnes normes)

3. On pose  $X := \{u \in C^2([0, 1]) \text{ tel que } u(0) = u(1) = 0\}$ . Montrez que  $(X, \|\cdot\|_{C^2})$  est un espace de Banach.

Dorénavant, on considère  $A : [0, 1] \rightarrow L_c(X, C^0([0, 1]))$ .

**Etape 2 : Contrôle des solutions de  $(E_\lambda)$ .** On se donne  $x \in C^2([0, 1])$  qui est une solution de  $(E_\lambda)$ .

3. On suppose qu'il existe  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que  $x$  est maximum en  $t_0$  sur  $[0, 1]$ . Que peut-on dire de  $x'(t_0)$  et  $x''(t_0)$ ? Déduisez-en qu'il existe  $\gamma > 0$  indépendant de  $x, y, \lambda$  tel que  $\|x\|_\infty \leq \gamma\|y\|_\infty$ .

4. On pose  $u := x'$ . Montrez qu'il existe  $t_1 \in ]0, 1[$  tel que  $u(t_1) = 0$ . Soit  $\mathcal{A}$  une primitive de  $t \mapsto -a(\lambda t)$  sur  $[0, 1]$ . Que vaut la dérivée de  $t \mapsto (u(t)e^{\mathcal{A}(t)})$ ? Déduisez-en une constante  $B > 0$  indépendante de  $x, y, \lambda$  telle que  $\|x'\|_\infty \leq B\|y\|_\infty$ .

5. Montrez qu'il existe  $M > 0$  indépendant de  $x, y, \lambda$  telle que  $\|x\|_{C^2} \leq M\|y\|_\infty$ .

6. Montrez que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et tout  $x \in X$ , alors  $\|A(\lambda)(x)\|_\infty \geq M^{-1}\|x\|_{C^2}$ .

**Etape 3 : Etude de  $A(0)$  :** On pose  $a_0 := a(0)$  et  $\omega_0 := \omega(0) > 0$ . On considère le système

$$\begin{cases} -x''(t) + a_0x'(t) + \omega_0x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_0)$$

7. On suppose que  $y \equiv 0$ . Déterminez  $r_1 > 0 > r_2$  tels que  $t \mapsto e^{rt}$  est solutions de  $-x'' + a_0x' + \omega_0x = 0$  si et seulement si  $r \in \{r_1, r_2\}$ .

8. On admet que la fonction  $x_0 \in C^2([0, 1])$  définie par

$$x_0(t) := -e^{r_1 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_1 s}}{r_1 - r_2} ds + e^{r_2 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_2 s}}{r_1 - r_2} ds$$

est solution de  $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$  lorsque  $y \not\equiv 0$ .

9. Déterminez l'unique solution de  $(E_0)$

10. Montrez que  $A(0) : (X, \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  est un homéomorphisme.

11. Montrez que  $A(\lambda)$  est inversible pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . Déduisez-en l'existence d'une unique solution de (E).

*Variation de la constante :* L'expression de la question 8. provient de la méthode de la variation de la constante. Voici la méthode en dimension  $> 1$

- Ecrire  $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$  comme un système  $2 \times 2$   $X'(t) = AX(t) + B(t)$ ;
- Déterminer deux solutions linéairement indépendantes  $X_1, X_2$  de  $X' = AX$  (en utilisant la résolution d'une équation linéaire d'ordre 2);
- Poser  $X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$  pour  $t \in [0, 1]$  et montrer que  $X' = AX + B$  si et seulement si  $\dot{\lambda}X_1 + \dot{\mu}X_2 = B$
- Déterminer  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\mu}$